Introduction à la théorie analytique des nombres

Berke Topacogullari*

4 décembre 2020

*Edited by Louis Poulain-Auzéau.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le théorème des nombres premiers

Le sujet principal de ce cours sont les nombres premiers, qui sont les nombres naturels qui admettent exactement deux diviseurs distincts positifs. Leur importance extraordinaire est due au fait qu'ils forment, dans un certain sens, les briques élémentaires de la structure multiplicative des nombres naturels.

Théorème 1.1 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.** *Tout nombre naturel s'écrit comme un produit de nombres premiers d'une façon unique, à l'ordre près des facteurs.*

Une question qui se pose très naturellement est la suivanta : combien de nombres premiers existe-t-il ? La réponse à cette question était déjà connue dans l'antiquité grecque.

Théorème 1.2 (Euclide)**.** *Il existe un nombre infini de nombres premiers.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$. Mais alors aucun de ces nombres premiers ne divise le nombre $p_1 \cdots p_r + 1$. Il faut que ce nombre soit divisé par un nombre premier différent, ce qui contredit notre hypothèse. □

En vue de ce résultat, spécifions la question précédente comme suit : comment sont distribués les nombres premiers ? Au premier abord, si on regarde par exemple le début de la suite des nombres premiers, ils semblent être distribués de façon complètement aléatoire :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Néanmoins, on peut se demander s'il existe une loi de nature plutôt statistique, qui décrit la répartition des nombres premiers.

Une façon d'étudier cette question est de considérer la fonction $\pi(x)$, qui compte le nombre des nombres premier inférieurs ou égaux à un réel x :

$$\pi(x) := \#\{p \leq x : p \text{ un nombre premier}\}$$

Alors, quelle est une bonne approximation de $\pi(x)$? Et quel est son comportement asymptotique quand $x \to \infty$?

Si on regarde $\pi(x)$ pour quelques valeurs larges de x, on finit par avoir l'impression que la densité des nombres premiers décroît de plus en plus lorsqu'on s'éloigne de 1. Vers la fin du XVIIIe siècle, A.-M. Legendre et, indépendamment, C. F. Gauß donnaient des formes

x	$\pi(x)$	$\pi(x)/x$
1000	168	$0,168$
2000	303	$0,1515$
5000	669	$0,1338$
10000	1229	$0,1229$
20000	2262	$0,1131$
50000	5133	$0,10266$
100000	9592	$0,09592$
200000	17984	$0,08992$
500000	41538	$0,083076$
1000000	78498	$0,078498$

TABLE 1.1 – Quelques valeurs de $\pi(x)$ jusqu'à $x = 1000000$

précises à cette observation en formulant la conjecture suivante pour le comportement asymptotique de $\pi(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \tag{1.1}$$

Néanmoins, aucun de ces deux mathématiciens ne fut capable de produire une preuve de cette conjecture.

Les premières avancées sur cette question vinrent d'une direction plutôt inattendue et concernaient initialement un problème assez different. Étant donnés des entiers a et $q \geq 1$, on peut se poser la question : au vu de l'infinité des nombres premiers, existe-t-il aussi une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique

$$a,\, a+q,\, a+2q,\, a+3q,\, a+4q,\, \ldots.$$

Clairement, il est nécessaire de supposer que a et q sont premiers entre eux pour que cela soit le cas. Mais à condition que ceci soit satisfait, on pourrait attendre, au vu de la répartition apparament aléatoire des nombres premiers, que toute progression arithmétique en contient un nombre illimité.

Bien qu'on puisse montrer ce fait pour quelques cas spéciaux par des méthodes élémentaires (par exemple si $q = 4$), le cas général se révèle fortement plus difficile à prouver. C'est finalement le mathématicien P. G. L. Dirichlet en 1841 qui put résoudre le problème en toute généralité.

Théorème 1.3 (Théorème de la progression arithmétique). *Soient a et $q \geq 1$ des entiers premiers entre eux. Alors il existe une infinité de nombre premiers qui sont congrus à a modulo q.*

En montrant ce résultat Dirichlet introduisit une multitude d'idées nouvelles, qui se révèrent très influentes dans les années et decennies à venir, notamment aussi au regard de l'étude de la répartition des nombres premiers.

Plus d'un demi-siècle après les premières conjectures autour de la fonction $\pi(x)$, P. L. Tchebychev établit en 1852 entre autres le théorème suivant, que l'on peut voir comme un premier pas en direction d'un preuve de la conjecture (8.7).

Théorème 1.4 (Tchebychev). *Il existe des constantes $c_2 > c_1 > 0$ telles que pour tout x suffisamment large,*

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\log x}.$$

En fait, il montra cette inegalité en donnant les valeurs explicites $c_1 = 0,92129$ et $c_2 = 1,10555$. Même si ses méthodes étaient encore loin de produire une formule asymptotique pour $\pi(x)$, ce résultat confirma toutefois que l'ordre de grandeur conjecturé était correct.

La situation changea radicalement quelques années plus tard en 1859, quand B. Riemann publia son article célèbre *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [1]. Dans ce papier de huit pages (le seul qu'il ait jamais publié sur la théorie des nombres) il considère une certaine fonction complexe $\zeta(s)$, la fonction zêta de Riemann comme elle est connue de nos jours, et il montre comment les propriétés de cette fonction sont liées étroitement avec la répartition des nombres premiers. Bien qu'il n'était pas capable de donner des preuves pour les énoncés les plus importants de son article, ses idées ont ouvrirent la porte à une preuve de la conjecture (8.7) et influencèrent de manière décisive le développement de ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie analytique des nombres.

En 1895, H. von Mangoldt montra rigoureusement les énoncés principaux de cet article, qui étaient constatés initialement sans preuve. À partir de ces travaux, la conjecture (8.7) fut finalement démonstrée un an plus tard en 1896 indépendemment par J. Hadamard et Ch.-J. de la Vallée Poussin, presque un siècle après qu'elle fut formulée pour la première fois.

Théorème 1.5 (Théorème des nombres premiers)**.** *On a*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Le but principal de ce cours sera d'introduire les définitions et méthodes de base de la théorie analytique des nombres, afin de montrer ensuite le théorème des progressions arithmétiques et le théorème des nombres premiers.

1.2 Notation

Bien qu'on introduira toute les notations nécessaire, on dit quelques mots sur les notation utilisées dans ce qui suit. On suit la convention que l'ensemble des entiers naturels ne contient pas le zéro, c'est à dire

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

La variable p sera reservée sans exception pour noter un nombre premier, et on utilisera parfois la notation $\mathbb{P}$ pour noter l'ensemble des nombres premiers,

$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ premier}\}.$$

On suivrat l'usage usuel dans la théorie analytique des nombres, que le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b soit noté par (a, b),

$$(a, b) := \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a,\ d \mid b\}.$$

La partie entière d'un nombre réel x est définie comme

$$[x] := \max\{a \in \mathbb{Z} : x - 1 < a \leq x\}.$$

Similairement on définit la partie fractionelle comme $\{x\} := x - [x]$.

1. Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée

Chapitre 2

Fonctions arithmétiques

2.1 Définition

On commence avec la définition simple suivante, qui se révèlera quand même très utile et qui nous accompagnera tout au long de ce cours.

Définition. *Une fonction arithmétique est une fonction à valeurs complexes de l'ensemble des entiers naturels.*

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des toutes les fonctions arithmétiques. Voici quelques premiers exemples de fonctions arithmétiques que l'on rencontrera souvent :

- Fonction identité : $\mathrm{id}(n) := n$
- Fonction constante égale à 1 : $\varepsilon(n) := 1$
- Fonction indicatrice des nombres premiers : $\delta_{\mathbb{P}}(n) := \pi(n) - \pi(n-1)$
- Logarithme : $\log(n)$
- Fonction nombre de diviseurs : $\tau(n) := \{d \in \mathbb{N} : d \mid n\}$
- Fonction phi d'Euler : $\varphi(n) := \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq n,\ (a,n) = 1\}$
- Fonction nombre de diviseurs premiers distincts : $\omega(n) := \{p \in \mathbb{P} : p \mid n\}$

Bien sûr avec le temps on fera la connaissance de beaucoup d'autres fonctions arithmétiques importantes.

2.2 Fonctions multiplicatives

Les fonctions arithmétiques qui sont compatibles avec la structure multiplicative de $\mathbb{N}$ jouent un rôle particulièrement important, qui mérite sa propre définition.

Définition. *Une fonction arithmétique f est appellée multiplicative, si elle n'est pas identiquement nulle et si*

$$a(n_1 n_2) = a(n_1)a(n_2) \tag{2.1}$$

pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $(n_{1},_{2}) = 1$. Elle est appelée complètement multiplicative si elle satisfait la condition (2.1) *pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.*

On note que pour tout fonction multiplicative f, on a nécessairement $f(1) = 1$. De plus, si la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre naturel n est donnée par

$$n = {p_1}^{\ell_1} \cdots {p_r}^{\ell_r}, \tag{2.2}$$

avec des premiers distincts $p_1, \ldots, p_\ell$, alors la valeur de $f(n)$ est donnée par

$$f(n) = f({p_1}^{\ell_1}) \cdots f({p_r}^{\ell_r}).$$

En d'autres mots, une fonction multiplicative est determinée par ses valeurs sur des puissances de nombres premiers, un principe qu'on utilisera beaucoup de fois. Similairement, une fonction complètement multiplicative est determinée par ses valeurs sur des nombres premiers.

Évidemment, les fonctions id et ε sont complètement multiplicatives. Par contre, les fonctions $\delta_{\mathbb{P}}$, log et ω ne sont ni multiplicatives, ni complètement multiplicatives.

En ce qui concerne la fonction τ, il n'est pas difficile de montrer qu'elle est une fonction multiplicative. En effet, si la factorisation de n est donnée par (2.2), alors tout diviseur de n sécrit comme

$$d = {p_1}^{\ell'_1} \cdots {p_\ell}^{\ell'_r} \quad \text{avec} \quad 0 \le \ell'_j \le \ell_j.$$

À l'inverse tout nombre de cette forme est clairement un diviseur de n. Alors, on a pour le nombre de diviseurs de n,

$$\tau(n) = (\ell_1 + 1) \cdots (\ell_r + 1).$$

Cela montre de plus, que τ est multiplicative, et que ses valuers sur les puissances des nombres premiers sont données par

$$\tau(p^\ell) = (\ell + 1).$$

La fonction φ est aussi multiplicative. Pour voir cela, supposons que n_1 et n_2 soient des entiers premiers entre eux. Comme les deux groupes

$$(\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z})^\times \quad \text{et} \quad (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z})^\times$$

sont isomorphes, ce qui est une conséquence immédiate du théorème chinois des résidus, on obtient

$$\varphi(n_1n_2) = \left|(\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z})^\times\right| = \left|(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})^\times\right|\left|(\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z})^\times\right| = \varphi(n_1)\varphi(n_2).$$

Plus tard on donnera une deuxième preuve de ce fait en utilisant une méthode différente.

2.3 La convolution de Dirichlet

L'ensemble $\mathcal{A}$ possède une structure additive, qui est simplement donnée par l'addition usuelle des fonctions. Naïvement, on pourrait munir $\mathcal{A}$ de la même manière d'une structure multiplicative, mais il se révèlera qu'une autre définition est plus appropriée dans notre contexte.

Définition. *Soit $f, g \in \mathcal{A}$. La convolution de Dirichlet de f et g, notée par $f * g$, est la fonction arithmétique définie par*

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

La signification de cette définition vient du fait qu'un grand nombre de fonctions arithmétiques sont définies comme la convolution d'autres fonctions arithmétiques plus simples. Par exemple, on a

$$\tau = \varepsilon * \varepsilon \quad \text{et} \quad \omega = \varepsilon * \delta_{\mathbb{P}},$$

et on verra beaucoup d'autres relations de cette forme dans ce qui suit.

Une propriété importante de la convolution de Dirichlet est le fait qu'elle préserve la multiplicativité.

Théorème 2.1. *Soient $f, g \in \mathcal{A}$ des fonctions multiplicatives. Alors leur convolution $f * g$ est aussi multiplicative.*

Preuve. Soit $h := f * g$. Il faut montrer que $h(n_1 n_2) = h(n_1)h(n_2)$ pour tous entiers n_1 et n_2 premiers entre eux. Comme $(n_1, n_2) = 1$, il existe une bijection entre l'ensemble des diviseurs de $n_1 n_2$ et l'ensemble des paires de diviseurs de n_1 et n_2,

$$\{d \in \mathbb{N} : d \mid n_1 n_2\} \longleftrightarrow \{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2 : d_1 \mid n_1,\ d_2 \mid n_2\},$$

qui est donnée par les applications

$$d \mapsto ((d, n_1), (d, n_2)) \quad \text{et} \quad d_1 d_2 \leftarrow\!\shortmid (d_1, d_2).$$

Par conséquent on a

$$h(n_1 n_2) = \sum_{d \mid n_1 n_2} f(d) g\Big(\frac{n_1 n_2}{d}\Big) = \sum_{\substack{d_1 \mid n_1 \\ d_2 \mid n_2}} f(d_1 d_2) g\Big(\frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}\Big),$$

et comme f et g sont multiplicatives, cette dernière expression se transforme en

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d_1 \mid n_1 \\ d_2 \mid n_2}} f(d_1 d_2) g\Big(\frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}\Big) &= \sum_{\substack{d_1 \mid n_1 \\ d_2 \mid n_2}} f(d_1) f(d_2) g\Big(\frac{n_1}{d_1}\Big) g\Big(\frac{n_2}{d_2}\Big) \\
&= \sum_{d_1 \mid n_1} f(d_1) g\Big(\frac{n_1}{d_1}\Big) \sum_{d_2 \mid n_2} f(d_2) g\Big(\frac{n_2}{d_2}\Big) = h(n_1) h(n_2),
\end{aligned}$$

ce qui est exactement ce qu'on voulait montrer. □

Remarquons que ce théorème ne reste plus vrai si on remplace la notion « multiplicative » par la notion plus restrictive « complètement multiplicative ». Par exemple, la fonction τ est la convolution de deux fonctions complètement multiplicative, mais elle-même ne l'est pas.

L'élement neutre par rapport à la convolution de Dirichlet est la fonction

$$e(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

que l'on peut vérifier facilement.

Théorème 2.2. *L'ensemble $\mathcal{A}$, muni de l'addition usuelle des fonctions comme addition et de la convolution de Dirichlet comme multiplication, est un anneau commutatif unitaire avec element neutre e.*

2.4 Invertibilité des fonctions arithmétiques

Une question qui se pose naturellement est de savoir quelles sont les fonctions arithmétiques qui ont un inverse par rapport à la convolution de Dirichlet. Étonnamment, la caractérisation de ces fonctions est assez simple.

Théorème 2.3. *Une fonction arithmétique f est inversible si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}$ inversible. Alors il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que $f * g = e$, et par conséquent on a

$$1 = (f * g)(1) = f(1)g(1),$$

ce qui n'est possible que si $f(1) \neq 0$.

À l'inverse, soit $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(1) \neq 0$. Alors on procède par récurrence pour construire un inverse g de f. On pose

$$g(1) := \frac{1}{f(1)},$$

et, si $g(d)$ est déjà définie pour tout $d < n$, on définit $g(n)$ par

$$g(n) := -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big).$$

Cette fonction est bien définie, car $f(1) \neq 0$, et par définition satisfait la condition $f * g = e$. Alors f est inversible. □

Si $f \in \mathcal{A}$ est inversible, on note f^{-1} son inverse et on l'appelle l'inverse de Dirichlet de f. Comme on peut s'y attendre, l'opération de prendre l'inverse est compatible avec la multiplicativité.

Théorème 2.4. *Soit $f \in \mathcal{A}$ multiplicative. Alors son inverse est aussi multiplicative.*

Preuve. On avait déjà mentionné au-dessus que toute fonction arithmétique f satisfait la condition $f(1) = 1$, ce qui assure l'existence de l'inverse f^{-1}. Afin de montrer la multiplicativité de f^{-1}, on construit une fonction multiplicative g qui satisfait la condition $f * g = e$. Par l'unicité de l'inverse, cela montrera que f^{-1} est en effet multiplicative.

Naturellement, on pose $g(1) := 1$. Sur les puissances des premiers p^ℓ on définit $g(p^\ell)$ simplement par

$$g(p^\ell) := f^{-1}(p^\ell),$$

et alors on étend cette définition par multiplicativité à tous les nombres naturels. Il reste à vérifier la condition $f * g = e$.

Comme f et g sont multiplicatives, alors leur convolution $f * g$ l'est aussi. Puisque la fonction e est également multiplicative, il suffit de vérifier la condition $f * g = e$ pour des puissances de nombres premiers. Mais on a

$$(f * g)(p^\ell) = \sum_{j=0}^{\ell} f(p^j)g(p^{\ell-j}) = \sum_{j=0}^{\ell} f(p^j)f^{-1}(p^{\ell-j}) = (f * f^{-1})(p^\ell) = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

2.5 La fonction de Möbius

On finit ce chapitre avec la discussion d'une fonction qui, au premier coup d'œil semble insignifiante, mais qui joue un rôle très important dans la théorie analytique des nombres. C'est la fonction de Möbius $\mu(n)$, qui est simplement définie comme l'inverse de Dirichlet de la fonction constante égale à 1,

$$\mu := \varepsilon^{-1}.$$

En d'autre mots, c'est l'unique fonction arithmétique, qui satisfait les conditions

$$\mu(1)=1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{d|n}\mu(d)=0 \quad \text{pour tout} \quad n\geq 2.$$

Il est possible de trouver une description plus explicite en suivant l'idée utilisé dans la preuve du théorème 2.3. Comme la fonction ε est multiplicative, alors la fonction de Möbius l'est aussi. Étant donné un nombre premier p, on a

$$0=(\varepsilon*\mu)(p)=\mu(1)+\mu(p),$$

ce qui implique que $\mu(p)=-1$, et de la même manière on obtient pour tout $\ell\geq 2$ l'identité

$$\sum_{j=2}^{\ell}\mu(p^j)=0,$$

qui montre par récurrence que $\mu(p^\ell)=0$ pour tout $\ell\geq 2$. En résumé, on obtient la description alternative suivante pour la fonction de Möbius :

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n=1,\\ (-1)^\ell & \text{si } n \text{ est le produit de } \ell \text{ nombres premiers distincts,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Une conséquence immédiate de la définition initiale de μ comme l'inverse de Dirichlet de ε est le résultat suivant.

Théorème 2.5 (Formule d'inversion de Möbius)**.** *Soit $f,g\in\mathcal{A}$. Alors on a*

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d) \qquad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N},$$

si et seulement si

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \quad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Le principe derrière ce résultat s'avère parfois très utile, et afin d'en donner un exemple, considérons la fonction $\varphi*\varepsilon$. Cette fonction est clairement multiplicative, et ses valeurs sur des puissances de premiers sont données par

$$(\varphi*\varepsilon)(p^\ell)=1+\sum_{j=1}^{\ell}p^{j-1}(p-1)=1+(p-1)\frac{p^\ell-1}{p-1}=p^\ell.$$

ce qui montre que $\varphi*\varepsilon=\mathrm{id}$. En multipliant les deux côtés par l'identité, on obtient la relation

$$\varphi=\mathrm{id}*\mu,$$

ou, plus explicitement,

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}. \tag{2.3}$$

Chapitre 3

Estimations asymptotiques

3.1 La notation de Landau

Afin de pouvoir décrire précisement le comportement asymptotiques des fonctions, il est utile d'introduire la notation suivante, qui est omniprésente dans la théorie analytique des nombres.

Soit $D \subset \mathbb{C}$, et soient $f : D \to \mathbb{C}$ et $g : D \to [0, \infty)$ des fonctions. On pose

$$f = O(g) \quad \text{ou} \quad f \ll g,$$

s'il existe une constante réelle positive C telle que

$$|f(z)| \leq Cg(z) \quad \text{pour tout} \quad z \in D.$$

Comme une variation de cette notation, on écrira

$$f_1 = f_2 + O(g),$$

si $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ sont des fonctions telles que $f_1 - f_2 \ll g$.
Si f est une fonction à valeurs positives, on note

$$f \asymp g,$$

lorsqu'on a

$$f \ll g \quad \text{et} \quad g \ll f.$$

Soit z_0 un point d'accumulation de D. On note

$$f(z) = o(g(z)) \quad \text{pour} \quad z \to z_0,$$

si $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$ et si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{g(z)} = 0.$$

Comme avant, on utilisera la notation

$$f_1 = f_2 + o(g),$$

pour dire que $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ sont des fonctions telles que $f_1 - f_2 = o(g)$. Comme cas spécial, on note

$$f_1(z) \sim f_1(z) \quad \text{pour} \quad z \to z_0,$$

lorsque

$$f_1(z) - f_1(z) = o(1).$$

Dans les applications, on omet souvent l'indication de D ou de z_0, si le contexte est clair. Dans les applications les fonctions f et g dépendent souvent de certains paramètres et dans ces cas là, la constante C, appelée la constante implicite, dépend aussi de ces paramètres, sauf si indiqué explicitement du contraire.

3.2 La fonction sommatoire d'une fonction arithmétique

Beaucoup de fonction arithmétiques intéressantes affichent un comportement très irrégulier voire chaotique. Deux exemples frappants sont la fonction $\tau(n)$, qui d'un côté prend des valeurs arbitrairement larges, mais qui de l'autre vaut 2 sur tous les nombres premiers, et la fonction de Möbius $\mu(n)$, qui prend les valeurs -1, 0 et 1 de façon apparemment aléatoire.

Néanmoins, il est possible d'étudier le comportement général d'une fonction arithmétique f en considérant sa moyenne arithmétique

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n),$$

ou, ce qui revient au même, sa fonction sommatoire

$$\sum_{n\leq x} f(n), \tag{3.1}$$

qui souvent peuvent être estimées assez précisément, contrairement à la fonction elle-même.

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques méthodes élémentaires pour déterminer le comportement asymptotique de la somme (3.1) pour des fonctions arithmétiques f. En général, l'objectif est de trouver une expression simple $M(x)$, telle que

$$\sum_{n\leq x} f(n) \sim M(x) \quad \text{pour} \quad x \to \infty.$$

Une formule de cette forme est appelée formule asymptotique.

Mais en général, on cherche à obtenir une approximation plus précise de la fonction sommatoire en donnant aussi une estimation de l'erreur qui en résulte. En d'autres mots, on cherche des expressions simples $M(x)$ et $E(x)$, telles qu'on peut écrire la somme (3.1) comme

$$\sum_{n\leq x} f(n) = M(x) + O(E(x)).$$

Cependant, il est souvent nécessaire d'obtenir des résultats plus précis de la forme

$$\sum_{n\leq x} f(n) = M(x) + O(R(x)),$$

où $M(x)$, où $R(x)$ est une expression simple qui est inférieure à $M(x)$. Dans ce contexte, la fonction $M(x)$ s'appelle le terme principal et l'expression $R(x)$ est le terme d'erreur.

3.3 Approximation par une intégrale

Le cas le plus simple est si $f \in \mathcal{A}$ est la restriction d'une fonction réelle continue. Si la variation de f n'est pas trop grande, on peut s'attendre à ce que sa fonction sommatoire soit bien approchée par l'intégrale correspondante, c'est à dire que l'on a

$$\sum_{n \leq x} f(n) \sim \int_1^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Un premier résultat, qui donne une forme précise à cette idée, est le suivant.

Théorème 3.1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y < x$, et soit $f : [y, x] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors*

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + O(|f(y)| + |f(x)|).$$

Preuve. Supposons que f soit croissante. En utilisant le fait que pour tout

$$\int_{n-1}^{n} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \quad \text{pour} \quad y + 1 \leq n \leq x - 1,$$

on obtient

$$\int_y^{x-1} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \leq \sum_{y+1 \leq n \leq x-1} f(n) \leq \int_{y+1}^{x} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

d'où le théorème. Le cas f décroissante se montre de la même manière. □

Comme applicaton immédiate de ce théorème, on obtient l'estimation asymptotique suivante pour la fonction sommatoire de ε,

$$\sum_{n \leq x} 1 = x + O(1),$$

ainsi que pour celle du logarithme,

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x). \tag{3.2}$$

Bien que cette formule simple se rende souvent utile, elle n'est applicable que pour une classe comparativement petite de l'ensemble des fonctions. Afin de traiter des fonctions plus générales, la formule sommatoire suivante est utile.

Théorème 3.2 (Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin)**.** *Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y < x$, et soit $f : [y, x] \to \mathbb{C}$ une fonction continûment dérivable. Alors*

$$\sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_y^x \psi(\xi) f'(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \psi(y) f(y) - \psi(x) f(x), \tag{3.3}$$

où $\psi(\xi)$ est la fonction définie par

$$\psi(\xi) := \{\xi\} - \frac{1}{2}.$$

Preuve. Observons tout d'abord qu'on peut supposer $[y]+1 \leq x$, car sinon la formule se montre de manière triviale.

On considère en premier le cas $y, x \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'intégration par parties, on peut vérifier facilement que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{f(n+1)+f(n)}{2} = \int_n^{n+1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_n^{n+1} \left(\xi - n - \frac{1}{2}\right) f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.4}$$

La formule (3.3) suit immédiatement en sommant cette identité sur tout les entiers n dans l'intervalle $[y, x-1]$.

Afin de traiter le cas général, on écrit la somme comme

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = f([y]+1) + \sum_{[y]+1<n\leq [x]} f(n).$$

En évaluant la somme à droite par (3.3), et en observant les identités

$$\int_{[x]}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{[x]}^{x} \psi(\xi) f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{f([x])}{2} + \psi(x) f(x),$$

et

$$\int_{y}^{[y]+1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y}^{[y]+1} \psi(\xi) f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{f([y]+1)}{2} - \psi(y) f(y),$$

qui peuvent être montrées de la même manière que l'identité (3.4) au-dessus, on la formule (3.3). □

Pour donner un premier exemple d'une application de ce résultat, on estime les sommes partielles de la série harmonique.

Théorème 3.3. *On a pour, tout $x \geq 1$,*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right), \tag{3.5}$$

où la constante γ est définie par

$$\gamma := 1 - \int_1^{\infty} \frac{\{\xi\}}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

Preuve. En utilisant le théorème (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi - \int_1^x \frac{\psi(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + \psi(1) - \frac{\psi(x)}{x} + 1 \\ &= \log x + \frac{1}{2} - \int_1^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + \int_x^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi - \frac{\psi(x)}{x}.\end{aligned}$$

On peut borner les deux derniers termes par

$$\int_x^{\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi - \frac{\psi(x)}{x} \ll \int_x^{\infty} \frac{1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x},$$

et on obtient la formule asymptotique (3.5) en notant que l'intégrale dans l'expression

$$\frac{1}{2} - \int_1^\infty \frac{\psi(\xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 1 - \int_1^\infty \frac{\{\xi\}}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

converge absolument. □

La constante γ, qui apparait dans la formule asymptotique (3.5), est appelé la constante d'Euler-Mascheroni. Une définition alternative, qui est une conséquence directe du théorème 3.3, est

$$\gamma = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{n} - \log x\right).$$

3.4 La méthode de convolution

Effectivement, les méthodes introduites dans la section précedente ne s'appliquent que pour le sous-ensemble des fonctions arithmétiques ayant un comportement très régulier, qui exclut notamment les cas les plus intéressants comme par exemple $\tau(n)$ et $\varphi(n)$. Cependant, il est souvent possible d'obtenir des résultats dans ces cas en notant que beaucoup de ces fonctions s'écrivent comme des convolution de fonctions plus simples.

Si $f \in \mathcal{A}$, l'idée générale est d'exprimer cette fonction comme une convolution $f = g*h$, où g est une fonction arithmétique, qui est dans un certain sens une bonne approximation de f et dont le comportement asymptotique est bien compris, et où h est une fonction arithmétique comparativement petite. Alors, on a pour la fonction sommatoire de f,

$$\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{d\le x} h(d) \sum_{n\le \frac{x}{d}} g(n),$$

et souvent on peut obtenir une formule asymptotique en estimant d'abord la somme sur n, et en complétant après la somme sur d.

Comme première application de cette idée, on montre la formule asymptotique suivante pour la fonction sommatoire de $\varphi(n)$.

Théorème 3.4. *Il existe une constante réelle C, telle que*

$$\sum_{n\le x}\varphi(n) = Cx^2 + O(x\log x).$$

Preuve. En utilisant l'identité (2.3), on peut écrire la somme comme suit,

$$\sum_{n\le x}\varphi(n) = \sum_{n\le x} n \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{\substack{n\le x\\ d|n}} n = \sum_{d\le x}\mu(d)\sum_{n\le\frac{x}{d}} n.$$

Par le théorème 3.1, on a

$$\sum_{n\le\frac{x}{d}} n = \frac{x^2}{d^2} + O\left(\frac{x}{d}\right),$$

ce qui nous donne

$$\sum_{n\le x}\varphi(n) = \sum_{d\le x}\mu(d)\left(\frac{x^2}{d^2} + O\left(\frac{x}{d}\right)\right) = x^2\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x\sum_{d\le x}\frac{1}{d}\right).$$

On peut estimer la somme sur d comme suit,

$$\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\bigg(\sum_{d>x}\frac{1}{d^2}\bigg)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

et en posant

$$C:=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2},$$

on obtient finalement

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=x^2\bigg(C+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\bigg)+O(x\log x)=x^2C+O(x\log x),$$

ce qui est la formule asymptotique cherchée. □

Plus tard dans le cours on trouvera la valeur exacte de la constante C, qui apparait dans cette formule asymptotique.

Une autre exemple où cette idée peut être appliquée avec succès concerne les entiers sans facteur carré (square-free integers), qui sont par définition les entiers qui non divisibles par le carré d'un premier.

3.5 La méthode hyperbolique de Dirichlet

La prochaine fonction que l'on veut considérer est la fonction diviseur $\tau(n)$. Comme on peut écrire cette fonction comme la convolution $\tau=\varepsilon*\varepsilon$, on peut essayer d'appliquer la méthode de convolution. Cela fonctionne, mais la formule qui en résulte a un terme d'erreur très mauvais :

$$\sum_{n\leq x}d(n)=x\log x+O(x).$$

Une méthode plus sophistiquée, due a Dirichlet, donne un résultat bien meilleur.

Théorème 3.5. *On a, pour tout $x\geq 1$,*

$$\sum_{n\leq x}d(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+O\big(\sqrt{x}\big).$$

Preuve. L'idée principale est d'interpréter la somme comme l'ensemble des points $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ tels que $ab\leq x$, c'est à dire

$$\sum_{n\leq x}\tau(n)=\#\{(a,b)\in\mathbb{N}^2:ab\leq x\}.$$

Maintenant, on sectionne cet ensemble en trois parties disjointes,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&:=\{(a,b)\in\mathbb{N}^2:a,b\leq\sqrt{x}\},\\ \mathrm{II}&:=\{(a,b)\in\mathbb{N}^2:b>\sqrt{x},ab\leq x\},\\ \mathrm{III}&:=\{(a,b)\in\mathbb{N}^2:a>\sqrt{x},ab\leq x\}.\end{aligned}$$

Cela correspond à écrire la somme en question comme

$$\sum_{n\leq x}d(n)=\sum_{a,b\leq x}1+2\sum_{\substack{ab\leq x\\ a\geq\sqrt{x}}}1. \tag{3.6}$$

La deuxième somme s'évalue facilement

$$\sum_{a,b\le\sqrt{x}} 1 = (\sqrt{x}+O(1))^2 = x + O\big(\sqrt{x}\big). \tag{3.7}$$

Concernant l'autre, on a en utilisant le théorème 3.3,

$$\sum_{\substack{ab\le x\\ a\ge\sqrt{x}}} 1 = \sum_{b\le\sqrt{x}}\sum_{a\le\frac{x}{b}} 1 = \sum_{b\le\sqrt{x}}\Big(\frac{x}{b}+O(1)\Big) = x\sum_{b\le\sqrt{x}}\frac{1}{b} + O\big(\sqrt{x}\big),$$

et en utilisant le théorème 3.3, on obtient

$$\sum_{\substack{ab\le x\\ a\ge\sqrt{x}}} 1 = x\bigg(\frac{\log x}{2}+\gamma+O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\bigg)+O\big(\sqrt{x}\big) = \frac{x\log x}{2}+x\gamma+O\big(\sqrt{x}\big). \tag{3.8}$$

Le théorème suit finalement en insérant (3.7) et (3.8) dans (3.6). □

Il est tentant d'interpreter ce résultat en disant qu'en moyenne un entier n a environ $\log n$ diviseurs.

Théorème 3.6. *Soit $A > 0$. Alors il existe un nombre infini de $n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$(\log n)^A < d(n).$$

Preuve. Soient $p_1, \ldots, p_{A+1}$ des nombres premiers distincts. On pose $n = (p_1 \cdots p_{A+1})^r$, où $r \ge 1$ est un entier positif arbitraire. Par la multiplicativité de la fonction nombre de diviseurs, on peut calculer la valeur de $d(n)$ comme suivant,

$$d(n) = d(p_1{}^r)\cdots d(p_{A+1}{}^r) = (r+1)^{A+1}.$$

En ce qui concerne $(\log n)^A$, on a simplement

$$(\log n)^A = r^A(\log p_1 + \ldots + \log p_{A+1})^A.$$

Donc, dès lors que $r \ge (\log p_1 + \ldots + \log p_{A+1})^A$, on obtient l'inégalité

$$(\log n)^A \le r^{A+1} < (r+1)^{A+1} = d(n).$$

Parce qu'on peut choisir r arbitrairement, cela montre qu'il existe un nombre infini de $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\log n)^A < d(n)$. □

Théorème 3.7. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$d(N) \le C_\varepsilon n^\varepsilon.$$

Preuve. Soit P_ε l'ensemble donné par

$$P_\varepsilon := \big\{p \in \mathbb{P} : p \le e^{1/\varepsilon}\big\}.$$

Par la définition de P_ε et par l'inégalité $r + 1 \le e^r$, qui est vraie pour tous $r \in \mathbb{N}$, on sait que

$$\frac{r+1}{p^{\varepsilon r}} \le 1 \quad \text{pour tous} \quad p \notin P_\varepsilon \quad \text{et} \quad r \in \mathbb{N}.$$

En plus, on définit le nombre réel M_ε comme

$$M_\varepsilon := \max_{\rho \in [0,\infty)} \frac{\rho+1}{2^{\varepsilon\rho}}.$$

Or, si $n \in \mathbb{N}$ et si $n = {p_1}^{r_1} \cdots {p_\ell}^{r_\ell}$ est sa décomposition en produit de facteurs premiers, on a

$$\frac{d(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{1 \le i \le \ell} \frac{(r_i+1)}{{p_i}^{\varepsilon r_i}} \le \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ p_i \in P_\varepsilon}} \frac{(r_i+1)}{{p_i}^{\varepsilon r_i}} \le \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ p_i \in P_\varepsilon}} \frac{(r_i+1)}{2^{\varepsilon r_i}} \le \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ p_i \in P_\varepsilon}} M_\varepsilon \le {M_\varepsilon}^{|P_\varepsilon|},$$

et l'énoncé se déduit en posant $C_\varepsilon := {M_\varepsilon}^{|P_\varepsilon|}$. □

3.6 La formule sommatoire d'Abel

Théorème 3.8 (Formule sommatoire d'Abel)**.** *Soit f une fonction arithmétique, soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y < x$, et soit $g : [y,x] \to \mathbb{C}$ une fonction continûment dérivable. Alors*

$$\sum_{y<n\le x} f(n)g(n) = \Big(\sum_{n \le x} f(n)\Big) g(x) - \Big(\sum_{n \le y} f(n)\Big) g(y) - \int_y^x \Big(\sum_{n \le \xi} f(n)\Big) g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Preuve. On pose

$$F(x) := \sum_{n \le x} f(n).$$

On peut supposer que $[y]+1 \le [x]$, car sinon la somme à gauche ne contient aucun terme et l'identité devient triviale. Alors, on a

$$\begin{aligned} \sum_{y<n\le x} f(n)g(n) &= \sum_{y<n\le x} (F(n)-F(n-1))g(n) \\ &= \sum_{y<n\le x-1} F(n)(g(n)-g(n+1)) + F(x)g([x]) - F(y)g([y]+1). \end{aligned}$$

En transformant la somme dans la dernière ligne comme suit,

$$\sum_{y<n\le x-1} F(n)(g(n)-g(n+1)) = -\sum_{y<n\le x-1} \int_n^{n+1} F(\xi)g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\int_{[y]+1}^{[x]} F(\xi)g'(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

et en observant que

$$\begin{aligned} F(x)g([x]) &= F(x)g(x) - \int_{[x]}^x F(\xi)g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \\ F(y)g([y]+1) &= F(y)g(y) + \int_y^{[y]+1} F(\xi)g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

on obtient finalement l'identité cherchée. □

Cette formule sommatoire est surtout utile si on cherche à évaluer la somme

$$\sum_{n \le x} f(n)g(n),$$

où f est une fonction arithmétique dont on connait déjà bien le comportement asymptotique, et où g est une fonction suffisament régulière.

Comme illustration simple, on veut trouver une formule asymptotique pour la somme

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Au vu du théorème 3.4, il est tout naturel d'utiliser la sommation par parties pour cette somme. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} &= \left(\sum_{n \leq x} \varphi(n)\right)\frac{1}{x} + \int_1^x \left(\sum_{n \leq \xi} \varphi(n)\right)\frac{1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{Cx^2 + O(x \log x)}{x} + \int_1^x \frac{C\xi^2 + O(\xi \log \xi)}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi \\
&= Cx + O(\log x) + \int_1^x C\,\mathrm{d}\xi + O\left(\int_1^x \frac{\log \xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\right) \\
&= 2Cx + O\big((\log x)^2\big),
\end{aligned}$$

où C est la même constante que dans le théorème 3.4.

Chapitre 4

Résultats élémentaires sur les nombres premiers

4.1 Formes équivalentes du théorème des nombres premiers

Il s'avère qu'il est avantageux de considérer des sommes ponderées par un poids approprié. Une possibilité naturelle est d'introduire un poids logarithmique. La fonction $\theta(x)$ définie comme cela est :

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p.$$

Une autre possibilité est d'utiliser la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$, qui est définie comme

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\ell \text{ avec } p \in \mathbb{P} \text{ et } \ell \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Évidemment, cette fonction n'est pas multiplicative. Cependant, il suit immédiatement de la définition que

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n,$$

ou en d'autres mots $\Lambda * \varepsilon = \log$, et en multipliant les deux côtes par μ, on voit que

$$\Lambda = \log * \mu.$$

On note $\psi(x)$ la fonction sommatoire de cette fonction,

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Ces fonctions sont souvent appelées les fonctions de Tchebychev. On a

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \sum_{2 \leq \ell \leq \frac{\log x}{\log p}} 1 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \left(\frac{\log x}{\log p} \right) \leq \sqrt{x} \log x,$$

donc on a

$$\psi(x) = \theta(x) + O\big(\sqrt{x} \log x\big). \tag{4.1}$$

Le théorème suivant montre qu'on peut considérer n'importe laquelle des fonctions $\pi(x)$, $\theta(x)$ ou $\psi(x)$ afin de montrer le théorème des nombres premiers.

Théorème 4.1. *Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad \theta(x) \sim x, \quad \psi(x) \sim x.$$

Preuve. Il suffit de montrer l'équivalence de i) et ii), car l'équivalence avec iii) suit par (4.1). Supposons que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Alors par la formule sommatoire d'Abel, on obtient

$$\theta(x) = \pi(x)\log x - \int_1^x \frac{\pi(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = x + o(x) + O\left(\int_2^x \frac{1}{\log \xi}\,\mathrm{d}\xi\right).$$

Mais

$$\int_1^x \frac{1}{\log \xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log \xi}\,\mathrm{d}\xi + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\log \xi}\,\mathrm{d}\xi \le \sqrt{x} + \frac{2}{\log x}\int_1^x 1\,\mathrm{d}\xi \ll \frac{x}{\log x},$$

et par conséquent

$$\theta(x) = x + o(x).$$

À l'inverse, supposons que $\theta(x) \sim x$. Comme avant, on utilise la formule sommatoire d'Abel,

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{\frac{3}{2}}^x \frac{\theta(\xi)}{\xi(\log \xi)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) + O\left(\int_{\frac{3}{2}}^x \frac{1}{(\log \xi)^2}\,\mathrm{d}\xi\right),$$

et similairement comme au-dessus, on voit que

$$\int_{\frac{3}{2}}^x \frac{1}{(\log \xi)^2}\,\mathrm{d}\xi \ll \frac{x}{(\log x)^2},$$

et ii) suit. □

Plus tard on se concentrera sur la somme $\psi(x)$.

4.2 Le théorème de Tchebychev

Théorème 4.2. *On a*

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}, \quad \theta(x) \asymp x, \quad \psi(x) \asymp x.$$

Preuve. Soit

$$S(x) := \sum_{n \le x} \log n - 2\sum_{n \le \frac{x}{2}} \log n.$$

En utilisant la formule (3.2), on voit que

$$S(x) = (\log 2)x + O(\log x).$$

En particulier, on a

$$S(x) \asymp x.$$

L'idée est maintenant est d'utiliser le fait que $\log = \Lambda * \varepsilon$ qui donne une connexion entre cette somme et les nombres premiers. Comme on a

$$\sum_{n\le x}\log n = \sum_{d\le x}\Lambda(d)\sum_{n\le \frac{x}{d}}1 = \sum_{d\le x}\Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right],$$

on voit que

$$S(x) = \sum_{d\le x}\Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right] - 2\sum_{d\le \frac{x}{2}}\Lambda(d)\left[\frac{x}{2d}\right] = \sum_{d\le x}\Lambda(d)\left(\left[\frac{x}{d}\right]-2\left[\frac{x}{2d}\right]\right).$$

Pour l'expression dans les parenthèses, on a pour tous $\alpha \ge 1$,

$$[\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right]\in\{0,1\},$$

et surtout il est vrai que

$$[\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right] = 1 \quad \text{si} \quad \alpha\in[1,2).$$

En utilisant ces faits, on peut borner la somme $S(x)$ par

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\le S(x)\le \psi(x).$$

Une conséquence immédiate est

$$\psi(x)\ge S(x)\gg x.$$

De l'autre côté on a

$$\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right) = O(x),$$

et

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\psi\left(\frac{x}{2^j}\right)-\psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\right) = O\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x}{2^j}\right) = O(x),$$

comme attendu.

L'affirmation que $\theta(x)\asymp x$ suit immédiatement en considérant (4.1). De plus, on a

$$\pi(x)\ge\sum_{p\le x}\frac{\log p}{\log x} = \frac{\theta(x)}{\log x}\gg\frac{x}{\log x},$$

et

$$\pi(x)\le\pi(\sqrt{x})+\frac{1}{\log\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}<p\le x}\log p\le\sqrt{x}+\frac{2\theta(x)}{\log x}\ll\frac{x}{\log x}.$$

Cela conclut la preuve. □

4.3 Les théorèmes de Mertens

Théorème 4.3. *On a*

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Preuve. On a

$$\sum_{n\le x}\log n=\sum_{d\le x}\Lambda(d)\Big[\frac{x}{d}\Big]=x\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d}+O\bigg(\sum_{d\le x}\Lambda(d)\bigg)=x\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d}+O(x),$$

où on a utilisé que $\psi(x)\ll x$, comme montré au-dessus. En comparant ce résultat avec (3.2) et en divisant par x, on voit que

$$\sum_{d\le x}\frac{\Lambda(d)}{d}=\log x+O(1).$$

En notant que

$$\left|\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\right|\le\sum_{\substack{p^\ell\le x\\ \ell\ge 2}}\frac{\log p}{p^\ell}\le\sum_{p}\log p\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{1}{p^\ell}=\sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)}\ll 1,$$

on obtient alors le résultat. □

Comme corollaire,

Théorème 4.4. *Il existe une constante réelle M telle que, pour $x\ge 3$,*

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+M+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Preuve. On pose

$$E(x):=\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}-\log x,$$

et on note que par le théorème 4.3 on a $E(x)\ll x$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p}&=\frac{\log x+O(1)}{\log x}+\int_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{\log\xi+E(\xi)}{(\log\xi)^2\xi}\,\mathrm{d}\xi\\ &=\int_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{1}{\xi\log\xi}\,\mathrm{d}\xi+\int_{\frac{3}{2}}^{x}\frac{E(\xi)}{\xi(\log\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi+1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\\ &=\log\log x+\bigg(\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}\frac{E(\xi)}{\xi(\log\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi+1-\log\log\frac{3}{2}\bigg)+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big),\end{aligned}\tag{4.2}$$

où on a utilisé le fait que

$$\int_{x}^{\infty}\frac{E(\xi)}{\xi(\log\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi\ll\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\xi(\log\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi=\int_{\log x}^{\infty}\frac{1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\ll\frac{1}{\log x}.$$

Comme l'intégrale en (4.2) est non seulement convergente, mais aussi constante, on obtient finalement le résultat. □

Théorème 4.5. *Il existe une constante réel $A>0$ telle que pour $x\ge 2$,*

$$\prod_{p\le x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)=\frac{A}{\log x}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big).$$

Preuve. Dans un premier temps on considère la somme

$$\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

En utilisant la série de Taylor de $\log x$ en 1 on voit que

$$\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell p^{\ell}},$$

et alors

$$\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{p\le x}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell p^{\ell}}=-\sum_{p\le x}\frac{1}{p}+\sum_{p}\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{1}{\ell p^{\ell}}+O\left(\sum_{p>x}\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{1}{\ell p^{\ell}}\right).$$

On utilise le théorème 4.4 pour évaluer la première somme à droite, la deuxième est une constante et pour le terme d'erreur on a

$$\sum_{p>x}\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{1}{\ell p^{\ell}}\le\sum_{p>x}\frac{1}{p^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{p^{\ell}}\le\sum_{p>x}\frac{1}{p(p-1)}\sum_{n>x}\frac{1}{(n-1)^2}\ll\frac{1}{x}.$$

Alors

$$\sum_{p\le x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\log\log x+A'+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

avec une certaine constante A' . En prenant l'exponentielle de chaque côté et en utilisant le fait que

$$\exp\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)=1+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

qui est une conséquence immédiate de la série de Taylor de exp en 1, on obtient finalement

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{A'}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Cela conclut la preuve. □

4.4 La fonction sommatoire de $\mu(n)$

Ici on considère la fonction sommatoire de $\mu(n)$

$$M(x):=\sum_{n\le x}\mu(n),$$

aussi appelé la fonctions de Mertens.

Lemme 4.6. *On a pour tout $x\ge 1$,*

$$\left|\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\right|\le 1.$$

Preuve. On peut supposer que $x \in \mathbb{N}$. En utilisant le fait que $e = \mu * \varepsilon$, on a

$$1 = \sum_{n\le x} e(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d\mid n} \mu(d) = \sum_{d\le x} \mu(d)\left[\frac{x}{d}\right] = x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d\le x}\mu(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}.$$

On note que $\left\{\frac{x}{x}\right\}$, on voit que

$$x\left|\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\right| \le 1 + \left|\sum_{d\le x-1}\mu(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}\right| \le 1 + x - 1 \le x,$$

et le lemme suit en divisant les deux cotes par x. □

Théorème 4.7. *Le théorème des nombres premiers est équivalent à l'affirmation que*

$$\sum_{n\le x}\mu(n) = o(x).$$

Preuve. Supposons que le théorème des nombres premiers est vrai, c'est à dire

$$\psi(x) \sim x.$$

Soit

$$H(x) := \sum_{n\le x}\mu(n)\log n.$$

Notons que

$$\Lambda(n) = \sum_{d\mid n}\mu(d)\log\left(\frac{n}{d}\right) = \log n\sum_{d\mid n}\mu(d) - \sum_{d\mid n}\mu(d)\log d = -\sum_{d\mid n}\mu(d)\log d,$$

et par inversion de Möbius

$$\mu(n)\log n = -(\mu * \Lambda)(n).$$

Alors

$$H(x) = -\sum_{d\le x}\mu(d)\sum_{n\le \frac{x}{d}}\Lambda(n) = -\sum_{d\le x}\mu(d)\psi\left(\frac{x}{d}\right).$$

Ici on utilise l'hypothèse. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $x_0 > 0$ telle que

$$|\psi(x) - x| \le \varepsilon x \quad \text{pour tout} \quad x \ge x_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} H(x) &= -\sum_{d\le \frac{x}{x_0}}\mu(d)\psi\left(\frac{x}{d}\right) - \sum_{\frac{x}{x_0}<d\le x}\mu(d)\psi\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= -x\sum_{d\le \frac{x}{x_0}}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d\le \frac{x}{x_0}}\mu(d)\left(\psi\left(\frac{x}{d}\right) - \frac{x}{d}\right) - \sum_{\frac{x}{x_0}<d\le x}\mu(d)\psi\left(\frac{x}{d}\right). \end{aligned}$$

et

$$|H(x)| \le x\left|\sum_{d\le x/x_0}\frac{\mu(d)}{d}\right| + \sum_{d\le \frac{x}{x_0}}\left|\psi\left(\frac{x}{d}\right) - \frac{x}{d}\right| + \sum_{\frac{x}{x_0}<d\le x}\left|\psi\left(\frac{x}{d}\right)\right|.$$

Le premier terme est borné par Lemme. Pour le deuxième on a par l'hypothèse

$$\sum_{d\le \frac{x}{x_0}} \left|\psi\left(\frac{x}{d}\right)-\frac{x}{d}\right| \le \varepsilon x \sum_{d\le x/x_0} \frac{1}{d} \le \varepsilon x \log x + O(x).$$

Et pour le troisieme terme

$$\sum_{\frac{x}{x_0}<d\le x} \left|\psi\left(\frac{x}{d}\right)\right| \le \sum_{x/x_0<d\le x} \frac{x}{d}\log\left(\frac{x}{d}\right) \le x_0 \log x_0 \sum_{d\le x} 1 \le (x_0 \log x_0)x.$$

Après tout

$$|H(x)| \le x(1+\varepsilon \log x + O(1) + x_0 \log x_0)$$

et

$$\left|\frac{H(x)}{x\log x}\right| \le \varepsilon + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

c'est a dire

$$\limsup_{x\to\infty}\left|\frac{H(x)}{x\log x}\right| \le \varepsilon$$

Comme ε était arbitraire, cela montre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x\log x} = 0.$$

Par la formule sommatoire d'Abel,

$$\frac{1}{x}\sum_{d\le x}\mu(d) = \frac{H(x)}{x\log x} + \frac{1}{x}\int_2^x \frac{H(\xi)}{\xi(\log \xi)^2}\,\mathrm{d}\xi = o(1) + O\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{\log \xi}\,\mathrm{d}\xi\right) = o(1).$$

L'autre sens est laissé en exercice. □

Chapitre 5

Séries de Dirichlet

5.1 La série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique

Pour des raisons qui deviendront claires on introduit l'analyse complex dans la des outils à notre disposition dans l'étude des fonctions arithmétiques. Un très bon moyen de faire ceci d'utiliser ce qu'on appelle les séries de Dirichlet. C'est d'ailleurs celui-ci qui modelé la théorie des nombres pendant les derniers siècles. Si f est une fonction arithmétique, alors la série de Dirichlet associée à f est définie comme

$$L_f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{pour} \quad s \in \mathbb{C}.$$

Il faut noter en ce moment une convention. Dans la théorie analytique des nombres, c'est la coutume de noter un nombre complexe $s \in \mathbb{C}$ comme

$$s = \sigma + it,$$

où $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ et $t = \mathrm{Im}(s)$.

Le lien entre les fonctions arithmétiques et l'analyse complexe est donné par .

Théorème 5.1. *Soit $f \in \mathcal{A}$. Alors il existe $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $L_f(s)$ converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$, et ne converge pas absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$.*

Preuve. Soit

$$D := \{s \in \mathbb{C} : L_f(s) \text{ converge absolument}\}.$$

Si $D = \emptyset$, alors naturellement on a $\sigma_{\mathrm{a}} = \infty$. Si $D = \mathbb{C}$, alors on a $\sigma_{\mathrm{a}} = -\infty$. alors on peut définir

$$\sigma_{\mathrm{a}} := \inf\{\mathrm{Re}(s) : s \in D\},$$

et on montre que ce nombre satisfait les conditions recherchées .

Si $\mathrm{Re}(s) < \sigma_{\mathrm{a}}$, on sait par définition de σ_{a} que $L_f(s)$ ne converge pas absolument. Par contre, si $s = \sigma + it, s' = \sigma' + it' \in \mathbb{C}$ tels que $\sigma' \geq \sigma$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^{s'}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma'}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^{s}} \right|.$$

Cela montre que si $L_f(s)$ converge absolument en s, alors forcément elle converge absolument en s' pour tout $\mathrm{Re}(s') \geq \mathrm{Re}(s)$. $\square$

La constante σ_a, qui apparaît dans le théorème au-dessus est appelée l'abscisse de convergence absolue de $L_f(s)$.
Le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ est appelé le demi-plan de convergence absolue de $L_f(s)$.

Théorème 5.2. *Soit $f \in \mathcal{A}$. Alors il existe $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, telle que la série de Dirichlet associée à f converge pour $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$, et diverge pour $\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$. La convergence est uniforme sur tout sous-ensemble compact du demi-plan de convergence. De plus, on a*

$$\sigma_a - 1 \leq \sigma_c \leq \sigma_a.$$

Preuve. Supposons que $L_f(s)$ converge en un point $s_0 \in \mathbb{C}$. On veut montrer qu'alors $L_f(s)$ converge pour tous $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.
Soit $K = [A,B] \times [C,D]$ un compact contenu dans la région de convergennce.
De plus, soit $s_0 \in (\sigma_c, A)$. Alors les deux nombres suivants existent :

$$m := \min\{\mathrm{Re}(s) - \mathrm{Re}(s_0) : s \in K\} \quad \text{et} \quad M := \max\{|s - s_0| : s \in K\}.$$

Soit $\delta = \sigma - \sigma_0 > 0$, et soient

$$S(x,y) := \sum_{x<n\leq y} \frac{f(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad S_0(x,y) := \sum_{x<n\leq y} \frac{f(n)}{n^{s_0}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le critère de Cauchy, on sait qu'il existe $x_0 \geq 1$ tel que

$$|S_0(x,y)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad y > x \geq x_0.$$

Par sommation partielle,

$$S(x,y) = \sum_{x<n\leq y} \frac{f(n)}{n^{s_0}} n^{s_0 - s} = S_0(x,y) y^{s_0 - s} - (s_0 - s) \int_x^y S_0(x,\xi) \xi^{s_0 - s - 1} \, \mathrm{d}\xi.$$

Par

$$|S(x,y)| \leq \varepsilon y^{-\delta} + \varepsilon |s - s_0| \int_x^y \xi^{-\delta - 1} \, \mathrm{d}\xi \leq \varepsilon \left(1 + \frac{|s - s_0|}{\sigma - \sigma_0}\right) \leq \varepsilon \left(1 + \frac{M}{m}\right) =: \varepsilon'.$$

Comme ε' ne dépend pas de x ni de y, alors on voit que le critère de Cauchy est satisfaite.
Maintenant posons

$$D := \{s \in \mathbb{C} : L_f(s) \text{ est convergente}\} \quad \text{et} \quad \sigma_c := \inf\{\mathrm{Re}(s) : s \in D\}.$$

D'abord, si D est vide on a $\sigma_c = \infty$, et si $D = \mathbb{C}$ alors $\sigma_c = -\infty$.
Si $\mathrm{Re}(s) < \sigma_c$, alors par définition $L_f(s)$ est divergente. Sinon il existe $s_0 \in D$. Mais comme on avait vu précédemment, alors tout s avec $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ est aussi dans D. Comme on peut trouver des s arbitrairement proche de la droite $\mathrm{Re}(s) = \sigma_c$, les deux premiers résultats sont montrés.
Il reste à montrer l'inégalité. Évidemment, on a $\sigma_c \leq \sigma_a$.
Supposons que $L_f(s)$ converge à's_0. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{s_0}} = 0.$$

En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right| \leq 1 \quad \text{pour} \quad n \geq n_0,$$

et par conséquent on a pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \le \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} \quad \text{pour} \quad n \ge n_0.$$

Alors, si $\sigma > \sigma_0 + 1$,

$$\sum_{n \ge n_0}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^s} \le \sum_{n \ge n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}} < \infty,$$

et on voit que $L_f(s)$ converge absolument pour tout $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 + 1$. □

Cette constante σ_c est appelée l'abscisse de convergence simple de $L_f(s)$.

Remarquons cependant qu'afin de pouvoir faire de l'analyse complexe, il faut s'assurer que les fonctions définies sont holomorphes. Néanmoins, après ce qu'on vient de montrer, ceci est une conséquence immédiate.

Théorème 5.3 (Weierstraß)**.** *Soit $f_n : S \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert $S \subset \mathbb{C}$. Supposons que f_n converge uniformément vers une fonction f sur tout sous-ensemble compact de S.*
Alors f est holomorphe et la suite des dérivées f_n' converge aussi uniformément vers f' sur tout compact de S.

En utilisant ce critère, on obtient le théorème suivant.

Théorème 5.4. *Soit $f \in \mathcal{A}$. Alors $L_f(s)$ définit une fonction holomorphe dans son demi-plan de convergence simple.*

Comme une autre conséquence du théorème 5.3, on obtient une expression de la dérivée de $L_f(s)$. En effet, on a

$$L_f'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\log n}{n^s},$$

et cette série converge aussi dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$.

5.2 Propriétés algébriques des séries de Dirichlet

Pour l'instant on n'a considéré les séries de Dirichlet que comme des fonctions holomorphes sans lien avec l'arithmétique. Le théorème le plus important dans ce contexte
.

Théorème 5.5. *Soient $f, g \in \mathcal{A}$, dont les séries de Dirichlet associées L_f et L_g converge absolument en $s \in \mathbb{C}$.*
Alors la série de Dirichlet associée à leur convolution L_{f*g} converge aussi absolument en s, et on a

$$L_{f*g}(s) = L_f(s)L_g(s).$$

Preuve. Par la définition de la convolution de Dirichlet il suit immédiatement que

$$L_f(s)L_g(s) = \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{f(n_1)g(n_2)}{{n_1}^s{n_2}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n_1n_2=n} f(n_1)g(n_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s} = L_{f*g}(s),$$

où l'échange des sommes est justifiée par la convergence absolue de L_f et L_g au point s. De même manière on voit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(f*g)(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^s|}\sum_{n_1n_2=n}|f(n_1)||g(n_1)| \leq \sum_{n_1=1}^{\infty}\left|\frac{f(n_1)}{n_1{}^s}\right|\sum_{n_2=1}^{\infty}\left|\frac{g(n_2)}{n_2{}^s}\right| < \infty,$$

ce qui montre la convergence absolue de L_{f*g} à s. □

Ce résultat montre que la convolution des fonctions arithmétiques correspond à la multiplication usuelle des séries de Dirichlet. Au vu de ce résultat, il n'est pas surprenant que la série de Dirichlet associée à $e(n)$, l'élément neutre de la convolution de Dirichlet, soit égal à la fonction $L_e(s) = 1$ pour tous $s \in \mathbb{C}$.

Il y a une série de Dirichlet particulière, qui joue un rôle tellement important dans la théorie analytique des nombres, que l'on lui a donné son propre nom. C'est la série de Dirichlet associée à ε, qui est plus connu comme la fonction zêta de Riemann,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Il faut noter que l'abscisse de convergence absolue, tout comme l'abscisse de convergence simple vaut 1, alors pour l'instant cette fonction n'est définie que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Les séries de Dirichlet de beaucoup d'autres fonctions arithmétiques s'expriment en terme de la fonction zêta de Riemann. Comme τ s'écrit comme la convolution $e * e$, on voit que

$$L_\tau(s) = \zeta(s)^2 \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

En utilisant ce fait, et en utilisant que $\mu * \varepsilon = e$, il suit que $L_\mu(s)\zeta(s) = 1$, ou en d'autres mots

$$L_\mu(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Ceci permet de plus d'évaluer la constante C du théorème 3.4. En utilisant le résultat bien connu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on voit que

$$C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{\pi^2}{6},$$

et alors la formule asymptotique dans le théorème 3.4 prend la forme

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n) = \frac{6}{\pi^2}x^2 + O(x\log x).$$

Pour le logarithme, c'est une conséquence de la dérivation d'une série de Dirichlet (cf 5.4) :

$$L_{\log}(s) = -\zeta'(s) \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Concernant la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$, par la relation $\Lambda = \log * \mu$, on obtient

$$L_\Lambda(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Finalement, en utilisant l'identité

$$L_{\mathrm{id}}(s) = \zeta(s-1) \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{Re}(s) > 2.$$

on voit que la série de Dirichlet associée à la fonction phi d'Euler $\varphi = \mu * \mathrm{id}$ est donnée par

$$L_\varphi(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \qquad \text{pour} \qquad \mathrm{Re}(s) > 2.$$

Finalement, une question se pose très naturellement : existe-t-il des fonctions arithmétiques possédant la même série de Dirichlet ?

Théorème 5.6. *Soit f et g des fonctions arithmétiques telles que leurs séries de Dirichlet convergent absolument pour tous* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ *et telles que $L_f(s) = L_g(s)$. Alors $f = g$.*

Preuve. Soit $h = f - g$. Par l'hypothèse, L_h converge pour $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ et y a la valeur 0. Alors il faut montrer que $h(n) = 0$ pour tous n.

Par contradiction, soit n_0 le plus petit entier tel que $h(n_0) = 0$. Alors pour $\sigma > \sigma_0$, on a

$$\frac{h(n_0)}{{n_0}^\sigma} = -\sum_{n>n_0}^{\infty} \frac{h(n)}{n^\sigma}$$

et alors

$$\begin{aligned}|h(n_0)| &\leq \sum_{n>n_0}^{\infty} |h(n)| \frac{{n_0}^\sigma}{n^\sigma} = \sum_{n>n_0}^{\infty} |h(n)| \Big(\frac{n_0}{n}\Big)^{\sigma_0} \Big(\frac{n_0}{n}\Big)^{\sigma-\sigma_0} \\ &\leq \sum_{n>n_0}^{\infty} |h(n)| \Big(\frac{n_0}{n}\Big)^{\sigma_0} \Big(\frac{n_0}{n_0+1}\Big)^{\sigma-\sigma_0} = {n_0}^{\sigma_0} \Big(\frac{n_0}{n_0+1}\Big)^{\sigma-\sigma_0} \sum_{n>n_0}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^{\sigma_0}}\end{aligned}$$

En laissant $\sigma \to \infty$,

$$|h(n_0)| = 0.$$

□

Ce résultat peut souvent être utilisé afin de montrer des relations entre des fonctions arithmétiques. Par exemple, l'identité

$$\sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \tau\Big(\frac{n}{d}\Big),$$

est équivalente à dire que

$$L_\varphi(s+1) L_\varepsilon(s) = L_\mu(s+1) L_\tau(s),$$

qui a l'identité triviale

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)} \zeta(s) = \frac{1}{\zeta(s+1)} \zeta(s)^2.$$

5.3 Le produit d'Euler

Dans la section précédente, on a vu que la convolution de Dirichlet des fonctions arithmétiques correspond à la multiplication de séries de Dirichlet. Une autre propriété, pour laquelle les séries de Dirichlet sont intéressantes est la multiplicativité.

Théorème 5.7. *Soit $f \in \mathcal{A}$ une fonction multiplicative. Si la série de Dirichlet associée à f converge absolument en s, alors on a l'identité*

$$L_f(s) = \prod_p \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{f(p^{\ell s})}{p^{\ell s}}\right), \tag{5.1}$$

où le produit infini converge absolument. De plus, si f est complètement multiplicative, alors l'identité se simplifie en

$$L_f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}. \tag{5.2}$$

Preuve. Commençons par montrer que le produit infini (5.1) converge absolument, ce qui équivaut à dire que la somme

$$\sum_p \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{f(p^{\ell s})}{p^{\ell s}} \right|$$

converge. Mais comme L_f converge absolument à s, on voit que

$$\sum_p \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{f(p^{\ell s})}{p^{\ell s}} \right| \leq \sum_p \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \frac{f(p^{\ell s})}{p^{\ell s}} \right| \leq \sum_n \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| < \infty.$$

Ensuite il faut vérifier que la valeur de ce produit vaut $L_f(s)$. On pose

$$\Pi(s;x) := \prod_{p \leq x} \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{f(p^{\ell s})}{p^{\ell s}}\right).$$

Si on note $p_1, \ldots, p_r$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à x, alors en utilisant la multiplicativité de f, on peut écrire $\Pi(x)$ comme

$$\Pi(x) = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{\infty} \frac{f(p^{\ell_1 s}) \cdots f(p^{\ell_r s})}{p^{\ell_1 s} \cdots p^{\ell_r s}} = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{\infty} \frac{f(p^{\ell_1 s} \cdots p^{\ell_r s})}{p^{\ell_1 s} \cdots p^{\ell_r s}}$$

Si on pose

$$N(x) := \{n \in \mathbb{N} : p \mid n \Rightarrow p \leq x\},$$

par le théorème fondamental de l'arithmétique, on a

$$|\Pi(s;x) - L_f(s)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus N(x)} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n > x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right|,$$

et alors

$$\lim_{x \to \infty} |\Pi(s;x) - L_f(s)| = 0.$$

Finalement, on note que si f est complètement multiplicative, alors

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^\ell = \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

ce qui montre (5.2). □

Le produit infini (5.1) est appelé le produit d'Euler de $L_f(s)$. Il est important de noter que la représentation d'une série de Dirichlet comme produit d'Euler n'est valide que sur le demi-plan de convergence absolue.

Comme cas spécial, on applique le théorème 5.7 pour écrire la fonction zêta de Riemann comme un produit d'Euler. En effet, comme la fonction $\varepsilon(n)$ est complètement multiplicative, on obtient

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \text{pour} \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

5.4 La formule de Perron

Jusqu'ici on a introduit les séries de Dirichlet et on a étudié leur propriétés basiques. Mais comment peut-on les utiliser afin d'étudier des questions arithmétiques ? Une possibilité est la formule de Perron. En bref, cette formule nous permet de transformer la fonction sommatoire d'une fonction arithmétique en une intégrale complexe contenant la série de Dirichlet associée.

Avant de l'énoncer et de la montrer, on montre d'abord une version préliminaire, qui concerne l'intégrale suivante :

$$I_c(y,T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \, \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Si on définit la fonction $\delta(y)$ par

$$\delta(y) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad y = 1, \\ 1 & \text{si} \quad y > 1, \end{cases}$$

alors le lemme suivant montre que l'intégrale $I_c(y,T)$ est une approximation très proche de cette fonction.

Lemme 5.8. *Soient $c, y, T > 0$ des nombres réels. Alors*

$$|I_c(y,T) - \delta(y)| \le \begin{cases} \frac{2y^c}{1+T|\log y|} & \textit{si} \quad y \neq 1, \\ \frac{2c}{c+T} & \textit{si} \quad y = 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $y = 1$. Ici on peut évaluer la valeur de $I_c(1,T)$ exactement, car

$$I_c(1,T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{d}t}{c+it} = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{2c}{c^2+t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{T}{c}} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \int_{\frac{T}{c}}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t,$$

et alors

$$\left|I_c(1,T)-\frac{1}{2}\right| \le \int_{\frac{T}{c}}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \le \min\left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \int_{T/c}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = \min\left(1, \frac{c}{T}\right) \le \frac{2c}{c+T},$$

ce qui montre (5.3) dans ce cas.

Ensuite, supposons que $0 < y < 1$. On estimera $I_c(y,T)$ de deux façons différentes. Soit $r \ge \max(1,c)$. Par le théorème intégral de Cauchy, on peut remplacer l'intégrale

$$I_c(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{r-iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{1}{2\pi i}\int_{r-iT}^{r+iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{1}{2\pi i}\int_{r+iT}^{c+iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Comme $0 < y < 1$, on a pour tout s avec $\mathrm{Re}(s) = r$,

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| \le \frac{1}{r},$$

ce qui nous permet d'estimer le seconde intégrale par

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{r-iT}^{r+iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \le \frac{T}{r}.$$

Or, si on laisse r tendre vers l'infini, on voit que cette intégrale tend vers 0. Alors, on peut écrire $I_c(y,T)$ comme

$$I_c(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{\infty-iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\infty+iT}^{c+iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Alors

$$|I_c(y,T)| \le \frac{1}{\pi T}\int_c^{\infty} y^{\mathrm{Re}(s)}\,\mathrm{d}s \le \frac{y^c}{T|\log y|}.$$

Soit maintenant C le cercle de rayon $R := \sqrt{c^2+T^2}$ centré à l'origine, et soit γ^+ le chemin qui commence à $c - iT$ et va jusqu'à $c + iT$ en suivant le cercle C. Comme la fonction $\frac{y^s}{s}$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, par le théorème intégral de Cauchy on a

$$I(y,T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C y^s \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Parce que $y < 1$, on a

$$\left|\frac{y^s}{s}\right| = \frac{y^{\mathrm{Re}(s)}}{R} \le \frac{y^c}{R},$$

et par conséquent

$$I(y,T) \le \frac{1}{2\pi}\pi R\frac{y^c}{R} < y^c,$$

ce qui montre (5.3) pour $0 < y < 1$.

La preuve si $y > 1$ est similaire. □

En laissant T tendre vers l'infini, on obtient le corollaire suivant du lemme 8.7.

Théorème 5.9 (Formule de Perron)**.** *Soient $c > 0$ et $x, T \geq 1$ des nombres réels. Soit f une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet associée converge absolument en $s = c$. Alors, pour $x \notin \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L_f(s)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Cette identité est aussi vraie pour $x \in \mathbb{Z}$, si on remplace le dernier terme $f(x)$ par $\frac{f(x)}{2}$.

Démonstration. Soit $x \notin \mathbb{Z}$. Comme la série de Dirichlet associée à f converge absolument pour tout $\mathrm{Re}(s) = c$, on peut échanger la somme et l'intégrale,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L_f(s)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

et par Lemme 5.8, on voit que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L_f(s)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\delta\left(\frac{x}{n}\right) + E(T),$$

avec

$$|E(T)| \leq 2x^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^c\left(1 + T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)}.$$

Le théorème suit en notant que

$$\lim_{T\to\infty} E(T) = 0.$$

Le cas $x \in \mathbb{Z}$ se traite de façon similaire. □

En général, l'intégrale en (**??**) ne converge pas absolument, ce qui pose souvent des problèmes. C'est pour cette raison qu'en pratique, il est plus utile d'appliquer une version tronquée de cette formule .

Théorème 5.10 (Formule de Perron, version utile)**.** *Soit $c > 0$, $x, \geq 1$ et soit $f(n)$ une fonction arithmétique dont la série de Dirichlet associée converge absolument en $s = c$. Alors on a, pour tous $x \notin \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L_f(s)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^c|f(n)|}{n^c\left(1 + T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)}\right),$$

où on a aussi la borne suivante pour le terme d'erreur,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^c|f(n)|}{n^c\left(1 + T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} \ll \frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^c} + \left(1 + \frac{x\log x}{T}\right)\max_{\frac{3x}{4}\leq n\leq\frac{5x}{4}} |f(n)|.$$

Cette formule est aussi vraie pour $x \in \mathbb{Z}$, si on remplace le dernier terme $f(x)$ par $\frac{f(x)}{2}$.

Preuve. Comme on avait vu, on a pour tout $x \geq 1$,

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L_f(s)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + E_c(x, T),$$

avec

$$|E_c(x,T)| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^c|f(n)|}{n^c\left(1 + T\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} + f([x]).$$

On sectionne la somme sur n à droite en trois parties :

$$\sum_{|n-x|>\frac{x}{4}}(\dots)+\sum_{2\le|n-x|\le\frac{x}{4}}(\dots)+\sum_{|n-x|<2}(\dots)=:E_c^{(1)}(x,T)+E_c^{(c)}(x,T)+E_c^{(3)}(x,T).$$

Pour $|n-x|\ge x/4$ on utilise le fait que $|\log(x/n)|\gg 1$, et alors

$$E_c^{(1)}(x,T)\ll\sum_{|n-x|\ge\frac{x}{4}}\frac{x^c|f(n)|}{n^cT\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|}\ll\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^c}.$$

Pour $2\le|n-x|\le x/4$, on a

$$\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|=\left|\log\left(1+\frac{n-x}{x}\right)\right|\ll\frac{|n-x|}{x},$$

et alors

$$\begin{aligned}E_c^{(2)}(x,T)&\ll\frac{x^c}{T}\sum_{2\le|n-x|\le\frac{x}{4}}\frac{|f(n)|x}{n^c|n-x|}\\&\ll\frac{x}{T}\left(\max_{2\le|n-x|\le\frac{x}{4}}|f(n)|\right)\sum_{2\le|n-x|\le\frac{x}{4}}\frac{1}{|n-x|}\ll\frac{x\log x}{T}\max_{2\le|n-x|\le\frac{x}{4}}|f(n)|.\end{aligned}$$

Finalement, pour la somme qui reste, on la borne trivialement,

$$E_c^{(3)}(x,T)\ll\max_{|n-x|\le 2}|f(n)|.$$

Le lemme suit en rassemblant les bornes. $\square$

Chapitre 6

Le théorème de la progression arithmétique

6.1 Caractères d'un groupe abélien fini

La première étape de la preuve du théorème 3.1 consiste à traduire la condition de congruence $p \equiv a \bmod q$ de manière sensible aux methodes analytiques. Les outils principaux seront certaines fonctions arithmétiques, appelée les caractères de Dirichlet, qui sont le sujet de cette séction. On commencera par développer une théorie des caractères pour des groupes abéliens finis généraux, pour appliquer les résultats aux cas voulus.

Soit G un groupe abélien fini avec élément neutre e.
Un caractère de G est un morphisme de groupe $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^*$ est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.
L'ensemble des caractères de G est noté par $\hat{G}$. Cet ensemble forme lui-même un groupe, appelé le groupe dual de G, lorsqu'on le munit de la multiplication des fonctions complexes. L'élément neutre est le caractère trivial χ_0, défini par $\chi_0(g) = 1$ pour tous $g \in G$, et l'inverse d'un élément $\chi \in \hat{G}$ est l'élément $\overline{\chi}$, défini par $\overline{\chi}(g) := \overline{\chi(g)}$.

Le théorème suivant montre que G et $\hat{G}$ sont isomorphes.

Théorème 6.1. *Soit G un group abélien fini et soit $\hat{G}$ son groupe dual. Alors G et $\hat{G}$ sont isomorphes. En particulier, on a $|G| = |\hat{G}|$.*

Démonstration. Par le théorème de structure des groupes abéliens finis, on sait que G est isomorphe au produit direct

$$G \cong \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z},$$

pour certains $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{>0}$. En conséquence, il existe des éléments $g_1, \ldots, g_k \in G$ d'ordres $\mathrm{ord}(g_i) = n_i$, tels que tout $g \in G$ peut être écrit de façon unique comme suit

$$g = {g_1}^{r_1} \cdots {g_k}^{r_k} \quad \text{avec} \quad 1 \leq r_i \leq n_i.$$

Si χ est un caractère de G, on a

$$\chi(g) = \chi(g_1)^{r_1} \cdots \chi(g_k)^{r_k},$$

ce qui montre immédiatement que tout $\chi \in \hat{G}$ est déterminé par ses valeurs en $g_1, \ldots, g_k$.
De plus, comme g_i est d'ordre n_i, on a

$$\chi(g_i)^{n_i} = \chi({g_i}^{n_i}) = \chi(e) = 1,$$

et alors $\chi(g_i)$ est nécessairement une racine n_i-ième de l'unité, ce qui revient à dire qu'il existe des entiers $1 \le a_i \le n_i$ tels que

$$\chi(g_i) = e^{2\pi i \frac{a_i}{n_i}}. \tag{6.1}$$

À l'inverse, étant donnés des entiers $1 \le a_i \le n_i$, il est clair que la fonction définie par (6.1) est un caractère de G, et que pour tout choix de $a_1, \dots, a_k$ on obtient un caractère différent. Cela prouve que $|G| = |\hat{G}|$.

Il reste à montrer que G et $\hat{G}$ sont isomorphes. Pour cela on définit les caractères $\chi_i \in \hat{G}$ en posant

$$\chi_i(g_i) = e^{\frac{2\pi i}{n_i}} \qquad \text{et} \qquad \chi_i(g_j) = 1 \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Évidemment, les caractères $\chi_1, \dots, \chi_k$ engendrent tout le groupe $\hat{G}$, et on peut écrire tout $\chi \in \hat{G}$ de façon unique comme un produit des ces caractères,

$$\chi = {\chi_1}^{r_1} \cdots {\chi_k}^{r_k} \quad \text{avec} \quad 1 \le r_i \le n_i.$$

En considérant ces faits, il est clair que le morphisme $\varphi : G \to \hat{G}$ défini par $\varphi(g_i) := \chi_i$ est un isomorphisme entre G et $\hat{G}$. $\square$

Une propriété très importante des caractères est le fait qu'ils satisfont les relations d'orthogonalité décrites dans le théorème suivant.

Théorème 6.2. *Soit G un groupe abélien fini. Alors, pour tout $g \in G$,*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{si} \quad g = e, \\ 0 & \text{si} \quad g \neq e, \end{cases} \tag{6.2}$$

et pour tout $\chi \in \hat{G}$,

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G| & \text{si} \quad \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{si} \quad \chi \neq \chi_0, \end{cases} \tag{6.3}$$

Démonstration. On commence avec (6.3). Le formule est évidemment vraie si $\chi = \chi_0$. Alors on peut supposer que $\chi \neq \chi_0$, auquel cas il existe un élément $h \in G$ tel que $\chi(h) \neq 1$. Or, on a

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(hg) = \chi(h) \sum_{g \in G} \chi(g),$$

et comme $\chi(h) \neq 1$, cela implique que

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Le preuve de (6.2) est très similaire. Le cas $g = e$ est trivial. Si $g \neq e$, alors il existe un caractère $\psi \in \hat{G}$ tel que $\psi(g) \neq 1$.

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} (\psi\chi)(g) = \psi(g) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g),$$

et comme avant cela implique que

$$(1 - \psi(g)) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0.$$

Comme $\psi(g) \neq 1$, alors nécessairement la somme sur χ doit être nulle. $\square$

Dans la théorie analytique des nombres, on rencontrera deux sortes de caractères, qui ont une importance particulière : Les caractères additifs et les caractères multiplicatifs.

Soit $q \geq 1$ un entier. Un caractère additif mod q est un caractère du group additif $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Bien qu'un caractère additif ψ ne soit défini que pour des classes d'équivalences mod q, on peut le voir aussi comme une fonction arithmétique en posant $\psi(n) := \psi(n \mod q)$ pour $n \in \mathbb{N}$ (par abus de notation on utilise le même symbol pour les deux fonctions). Il existe q caractères additifs mod q, et comme on a montré dans la preuve du théorème 6.1, chaque ψ mod q peut être écrit explicitement comme une fonction exponentielle de la forme

$$\psi(n) = e^{2\pi i \frac{an}{q}} \quad \text{avec} \quad 1 \leq a \leq q.$$

Les relations d'orthogonalité prennent la forme

$$\sum_{a \bmod q} e^{2\pi i \frac{an}{q}} = \begin{cases} q & \text{si} \quad q \mid n, \\ 0 & \text{si} \quad q \nmid n, \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Un caractère multiplicatif mod q est un caractère du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Comme $|(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times| = \varphi(q)$, il existe $\varphi(q)$ caractéres multiplicatifs mod q. Contrairement au cas additif, les caractères multiplicatifs ne peuvent pas être écrits en général dans une forme explicite. Un caractère multiplicatif χ mod q est initialement supporté sur toutes les classes d'équivalences mod q qui sont premières avec q. Il est néanmoins utile de l'étendre sur tout $\mathbb{Z}$ et le voir comme une fonction arithmétique en définissant

$$\chi(n) := \begin{cases} \chi(n \bmod q) & \text{si} \quad (n,q) = 1, \\ 0 & \text{si} \quad (n,q) \neq 1, \end{cases} \tag{6.4}$$

(comme avant, on utilise le même symbole pour les deux fonctions, ce qui en général ne porte pas de confusion). Une fonction de la forme (6.4) est appelée un caractère de Dirichlet. Le caractère de Dirichlet qui correspond au caractère trivial χ_0 mod q est appelé le caractère principal mod q, et il est défini explicitement par

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (n,q) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les relations d'orthogonalité prennent ici la forme

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si} \quad n \equiv 1 \bmod q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{n \bmod q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q) & \text{si} \quad \chi = \chi_0, \\ 0 & \text{si} \quad \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

L'importance des caractères de Dirichlet découle du fait qu'il peuvent être utilisés pour encoder les relations algébriques en termes de fonctions multiplicatives. En effet, si a et q sont des nombres entiers premiers entre eux, alors

$$n \equiv a \bmod q \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{a}n \equiv 1 \bmod q.$$

Si f est une fonction arithmétique et si $(a,q) = 1$, on obtient en utilisant les relations d'orthogonalité,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv a \bmod q}} f(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ \overline{a}n\equiv 1 \bmod q}} f(n)$$
$$= \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n\le x} f(n) \sum_{\chi \bmod q} \chi(\overline{a}n)$$
$$= \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a)\sum_{n\le x} f(n)\chi(n).$$

Ici, le point crucial est le fait que χ est complètement multiplicatif. Si f est une fonction multiplicative, alors $f\chi$ est aussi une fonction multiplicative.

6.2 Les fonctions L de Dirichlet

Soit χ mod q un caractère de Dirichlet. La série de Dirichlet associée à ce caractère est définie par

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Cette série converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et y définit une fonction holomorphe, appelée la fonction L de Dirichlet associée à χ. Comme χ est complètement multiplicatif, on peut écrire $L(s,\chi)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ aussi comme un produit eulérien,

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

On commence avec le fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

qui est simplement la fonction L de Dirichlet associée au caractère principal χ_0 mod 1. Bien que initialement cette fonction ne soit définie que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, il est possible de la prolonger méromorphiquement au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. En effet, en utilisant la formule sommatoire d'Abel, on obtient

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n^s} = \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s} + s\int_1^x \frac{\lfloor \xi\rfloor}{\xi^{s+1}}\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{x^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{\infty} \frac{\xi - \lfloor \xi\rfloor}{\xi^{s+1}}\,\mathrm{d}\xi + O\big(x^{-\mathrm{Re}(s)}\big).$$

En laissant x tendre vers l'infini, on alors obtient l'identité suivante pour $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{\infty} \frac{\xi - \lfloor \xi\rfloor}{\xi^{s+1}}\,\mathrm{d}\xi. \tag{6.5}$$

Mais l'intégrale sur ξ converge absolument pour tout $\mathrm{Re}(s) > 0$, et par conséquent on voit que l'expression à droite définit une fonction méromorphe dans ce demi-plan, qui est le prolongement méromorphe cherché de la fonction zêta de Riemann. De plus, cette identité montre que $\zeta(s)$ possède un seul pôle simple en $s = 1$ avec résidue 1.

Les fonctions L de Dirichlet associées aux autres caractères principaux ont un comportement très similaire. En effet, si χ_0 et le caractère principal mod q, en utilisant le produit eulérien on obtient tout de suite

$$L(s,\chi_0) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{(p,q)=1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Cette identité montre que $L(s,\chi_0)$ se prolonge pour tout $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Lemme 6.3. *Soit χ_0 le caractère principal mod q. Alors $L(s,\chi_0)$ se prolonge méromorphiquement au demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *avec un seul pôle simple en $s = 1$ de résidue*

$$\operatorname*{Res}_{s=1} L(s,\chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q}.$$

Pour les fonctions L des caractères non-principaux, la situation est bien différente. On commence avec l'observation suivante

$$\left|\sum_{n\le x} \chi(n)\right| \le q.$$

qui est une conséquence immédiate des relations d'orthogonalité des caractères de Dirichlet et du fait que χ est une fonction périodique de période q. En utilisant encore une fois la formule sommatoire d'Abel

$$\left|\sum_{n\le x} \frac{\chi(n)}{n^s}\right| = \left|\frac{1}{x^s}\sum_{n\le x}\chi(n) + s\int_1^x \frac{1}{x^{s+1}}\sum_{n\le\xi}\chi(n)\,\mathrm{d}\xi\right| \le \frac{q}{x^{\mathrm{Re}(s)}} + \frac{q|s|}{|Re(s)|}\left(1 - \frac{1}{x^{\mathrm{Re}(s)}}\right),$$

et on voit que la somme est convergente pour tout $\mathrm{Re}(s)$. Par conséquent, cela définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $Re(s) > 0$.

Lemme 6.4. *Soit χ mod q un caractère de Dirichlet non-principal. Alors la fonction L de Dirichlet associée à χ se prolonge analytiquement au demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Le comportement des fonction L de Dirichlet en $s = 1$ joue un rôle important dans la preuve du théorème de la progression arithmétique.

6.3 La preuve du théorème de Dirichlet

Afin de montrer le théorème 3.1, on considèrera la somme

$$\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv a \bmod q}} \frac{1}{p},$$

et on montrera qu'elle est en fait divergente. En n'utilisant que des méthodes élémentaires, on a déjà montré que c'est vrai pour le cas $q = 1$, où la somme va sur tous les nombres premiers.

Pour motiver l'idée de la preuve du théorème de Dirichlet, on donnera maintenant une deuxième démonstration de ce fait, qui cette fois repose sur les séries de Dirichlet.

Remarquons qu'en utilisant le produit eulérien de la fonction zêta de Riemann, on peut écrire $\log(\zeta(s))$ pour tout $s > 1$ comme suit,

$$\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell p^{\ell s}}.$$

Or,

$$\sum_p \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{1}{\ell p^{\ell s}} \leq \sum_p \frac{1}{p^{2s}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\ell s}} = \sum_p \frac{1}{p^s(p^s-1)} \leq \sum_p \frac{1}{p^2},$$

et par conséquent

$$\log \zeta(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} + O(1).$$

Cela donne une lien entre la fonction $\log(\zeta(s))$ et la somme (**??**). En particulier, comme $\log(\zeta(s))$ tend vers l'infini pour $s \to 1+$, l'identité montre que la somme des réciproques des nombres premiers est divergente. C'est aussi une preuve analytique de l'infinité des nombres premiers.

L'idée initiale du preuve du theoreme 3.1 est très similaire. On utilise les relations d'orthogonalité ()

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \bmod q}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{p \leq x} \frac{\chi(p)}{p^s}.$$

et pour analyser la dernière somme sur p on utilise l'idée au-dessus.

Alors, comme avant,

$$\log(L(s,\chi)) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) + 2\pi i m.$$

Ici, il faut faire attention, car le logarithme est complexe. En laissant $s \to \infty$, on voit que m $= 0$. Alors, on continue

$$\log(L(s,\chi)) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^\ell}{\ell p^{\ell s}} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1). \tag{6.6}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{p \equiv a \bmod q} \frac{1}{p^s} &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \log L(s,\chi_0) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_0}} \overline{\chi}(a) \log L(s,\chi) + O(1).\end{aligned}$$

On a utilisé que

Lemme 6.5. *Soit χ mod q un caractère de Dirichlet non-principal. Alors $L(1,\chi) \neq 0$.*

6.4 Non-annulation de $L(1,\chi)$

Il reste à montrer le lemme 6.5, qui est vraiment au cœur de la preuve du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet. On commence avec l'observation que pour tout nombre réel $s > 1$, on a

$$\prod_{\chi \bmod q} L(s,\chi) \geq 1. \tag{6.7}$$

En effet, en utilisant l'identité (6.6), on obtient

$$\sum_{\chi \bmod q} \log L(s,\chi) = \sum_p \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell p^{\ell s}} \sum_{\chi \bmod q} \chi(p^\ell) = \varphi(q) \sum_{\substack{p \\ p^\ell \equiv 1 \bmod q}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell p^{\ell s}} \geq 0,$$

et alors (6.7) suit immédiatement en prenant l'exponentielle des deux côtés.

Supposons qu'il existe deux caractères non-principaux différents χ_1 et χ_2 mod q, dont la fonction L de Dirichlet associée s'annule en $s=1$. En conséquence, la fonction

$$\prod_{\chi \bmod q} L(s,\chi)$$

s'annulerait aussi au point $s=1$, car $L(s,\chi_0)$ y a un pôle simple et tout les autres $L(s,\chi)$ y sont holomorphes. Mais cela contredit bien évidemment l'observation (6.7). Alors il existe au plus un caractère χ mod q tel que $L(s,\chi)=0$.

Pour tout caractère χ, il est vrai que

$$L(s,\overline{\chi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\chi}(n)}{n^s} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{\overline{s}}}} = \overline{L(\overline{s},\chi)}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. En prolongeant méromorphiquement les deux côtes, on voit immédiatement que cette identité est vraie aussi dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. En particulier, si χ est un caractère tel que $L(1,\chi)=0$, alors on a aussi que $L(1,\overline{\chi})=0$. Comme on a vu au-dessus, il existe au plus un caractère dont la fonction L de Dirichlet s'annule en $s=1$, ce qui signifie que $\chi = \overline{\chi}$, c'est à dire χ doit être un caractère réel.

Il suffit donc de prouver le lemme 6.5 pour des caractères réels $\chi \neq \chi_0$. Soit $\sigma_\chi(n)$ la fonction arithmétique suivante

$$\sigma_\chi(n) := \sum_{d|n} \chi(d).$$

Dans ce qui suit on va considérer l'expression

$$\sum_{n \leq x} \frac{\sigma_\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}}},$$

et on va l'estimer de deux façons différents.

Comme $\sigma_\chi(n)$ est la convolution des deux fonctions arithmétiques bien connues, il est raisonnable d'employer la méthode hyperbolique de Dirichlet afin de trouver une formule asymptotique. On commence en écrivant

$$\sum_{n \leq x} \frac{\sigma_\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{\substack{a,b \\ ab \leq x}} \frac{\chi(a)}{(ab)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{a \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(a)}{a^{\frac{1}{2}}} \sum_{b \leq \frac{x}{a}} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} + \sum_{b \leq \sqrt{x}} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \sum_{\sqrt{x} < a \leq \frac{x}{b}} \frac{\chi(a)}{a^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.8}$$

Pour évaluer les sommes sur a, on note que la formule sommatoire d'Abel nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{y_1 < a \leq y_1} \frac{\chi(a)}{a^\sigma} &= \frac{1}{{y_2}^\sigma} \sum_{a \leq y_2} \chi(a) - \frac{1}{{y_1}^\sigma} \sum_{a \leq y_1} \chi(a) + \sigma \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\xi^{\sigma+1}} \left(\sum_{a \leq \xi} \chi(a) \right) \mathrm{d}\xi \\ &\ll \frac{1}{{y_2}^\sigma} + \frac{1}{{y_1}^\sigma}. \end{aligned}$$

En utilisant cette borne supérieure, on peut estimer le second terme en droite de (8.6) comme suit,

$$\sum_{b\leq\sqrt{x}}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}\sum_{\sqrt{x}<a\leq\frac{x}{b}}\frac{\chi(a)}{a^{\frac{1}{2}}}\ll\sum_{b\leq\sqrt{x}}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}\left(\sqrt{\frac{b}{x}}+\frac{1}{x^{1/4}}\right)\ll 1.$$

Pour évaluer l'autre terme, on utilise la formule d'Euler-Maclaurin

$$\sum_{b\leq\frac{x}{a}}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{\frac{x}{a}}+C+O\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$$

pour une certaine constante réelle C. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a^{\frac{1}{2}}}\sum_{b\leq\frac{x}{a}}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}&=2\sqrt{x}\sum_{a\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a}+C\sum_{a\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a^{\frac{1}{2}}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{a\leq\sqrt{x}}1\right)\\&=2\sqrt{x}\sum_{a\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a}+O(1).\end{aligned}$$

La somme sur a qui reste est convergente, et en utilisant encore une fois (), on peut l'estimer comme suit,

$$\sum_{a\leq\sqrt{x}}=L(1,\chi)-\sum_{a\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a}=L(1,\chi)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

En tout, on obtient

$$\sum_{n\leq x}\frac{\sigma_\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}}}=2L(1,\chi)+O(1).$$

Cela signifie que le comportement asymptotique de la somme dépend de la valeur de $L(1,\chi)$.

Une deuxième façon d'évaluer la somme est la suivante. Si p est un premier qui divise q, alors

$$\sigma_\chi(p^\ell)=1.$$

Si $p\nmid q$, alors

$$\sigma_\chi(p^\ell)=\sum_{j=0}^{\ell}\chi(p)^j.$$

on peut caractériser

$$\sigma_\chi(p^\ell)=\begin{cases}\ell+1 & \text{si}\quad \chi(1)=1,\\ 1 & \text{si}\quad \chi(1)=-1 \text{ et } \ell \text{ est pair },\\ 0 & \text{si}\quad \chi(1)=-1 \text{ et } \ell \text{ est impair },\end{cases}$$

En particulier, on voit que $\sigma_\chi(p^\ell)\geq 1$ pour tout ℓ pair. En plus, si n est un nombre carré, alors $\sigma_\chi(n)\geq 1$. Alors

$$\sum_{n\leq x}\frac{\sigma_\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}}}\geq\sum_{\substack{n\leq x\\ n\text{ est un carré}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\geq\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\gg\log x.$$

Cela montre que la somme devient arbitrairement large, et par conséquent $L(1,\chi)>0$.

Chapitre 7

La fonction zêta de Riemann

7.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma $\Gamma(s)$ est définie initialement en posant

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{s-1}\,\mathrm{d}\xi. \tag{7.1}$$

L'intégrale converge absolument dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, et alors y définit une fonction holomorphe. En intégrant par parties, on voit que cette fonction satisfait l'identité

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1), \tag{7.2}$$

qui nous permet de la prolonger méromorphiquement à tout le plan complexe. En effet, si on suppose qu'elle est déjà définie dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > -n$ où n est un entier positif, alors par l'identité (7.2) on peut définir un prolongement au demi-plan $\mathrm{Re}(s) > -n-1$ en posant

$$\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

En utilisant ce principe récursivement, on obtient une fonction méromorphe définie sur le plan complexe qui possède des pôles simples en $s = 0, 1, 2, \dots$ avec les résidus

$$\operatorname*{Res}_{s=-\ell} \Gamma(s) = \frac{(-1)^\ell}{\ell!},$$

et qui satisfait pour tout $s \in \mathbb{C}$ l'identité (7.2). En vue de la relation

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N},$$

on peut voir la fonction Gamma aussi comme une généralisation de la factorielle aux nombres complexes.

Il existe plusieurs représentations différentes de la fonction Gamma à part la représentation initiale comme intégrale (7.1). Le résultat suivant en donne un exemple important.

Théorème 7.1. *On a pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{\ell=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{s}{\ell}\Big) e^{-\frac{s}{\ell}}, \tag{7.3}$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni.

Preuve. Notons d'abord que le produit infini converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$, puisqu'en écrivant l'exponentielle comme une série entière, on voit que

$$\prod_{\ell=1}^{\infty}\Big(1+\frac{s}{\ell}\Big)e^{-\frac{s}{\ell}} = \prod_{\ell=1}^{\infty}\Big(1+\frac{s}{\ell}\Big)\Big(1-\frac{s}{\ell}+O\Big(\frac{1}{\ell^2}\Big)\Big) = \prod_{\ell=1}^{\infty}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\ell^2}\Big)\Big) < \infty.$$

En fait, il est clair que la convergence est uniforme sur les compacts, ce qui montre que le RHS de (7.3) définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Afin de montrer l'identité (7.3), on peut se restreindre au cas $s > 0$, car si cette identité est vrais pour les réels positifs, alors par le théorème d'identité des fonctions holomorphes, elle est nécessairement vraie pour tout $s \in \mathbb{C}$.

On commence en intégrant par parties pour montrer que

$$\int_0^1 \xi^{s-1}(1-\xi)^n \,\mathrm{d}\xi = \frac{n}{s}\int_0^1 \xi^s(1-s)^{n-1}\,\mathrm{d}\xi.$$

En utilisant cette formule récursivement, on voit que

$$\int_0^1 \xi^{s-1}(1-\xi)^n \,\mathrm{d}\xi = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s+1}\cdot\frac{n-2}{s+2}\cdots\frac{1}{s+n-1}\int_0^1 \xi^{s+n-1}\mathrm{d}\xi = \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)},$$

et en faisant la substitution $\xi \mapsto \frac{\xi}{n}$ dans l'intégrale à gauche, cette identité devient

$$\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \int_0^n \xi^{s-1}\Big(1-\frac{\xi}{n}\Big)^n \mathrm{d}\xi. \tag{7.4}$$

Maintenant on veut laisser n tendre vers l'infini. Comme la procédure de prendre cette limite n'est pas tout à fait triviale, on donne les détails. En définissant la suite de fonctions $g_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(\xi) := \begin{cases} \xi^{s-1}\big(1-\frac{\xi}{n}\big)^n & \text{si} \quad \xi \in (0,n), \\ 0 & \text{si} \quad \xi \in [n,\infty), \end{cases}$$

on peut écrire (7.4) comme

$$\int_0^\infty g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}. \tag{7.5}$$

Notons d'abord que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\xi) = \xi^{s-1}e^{-\xi} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \Big(\lim_{n\to\infty} g_n(\xi)\Big)\mathrm{d}\xi = \Gamma(s).$$

De plus, grâce à l'inégalité bien connue

$$\Big(1-\frac{\xi}{n}\Big)^n \le e^{-\xi},$$

on voit que les fonctions $g_n(\xi)$ sont bornées par

$$|g_n(\xi)| \le \xi^{s-1}e^{-\xi}.$$

Ces faits nous permettent d'utiliser le théorème de la convergence dominée afin de prendre la limite $n \to \infty$ des deux côtés de (7.5), et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Gamma(s). \tag{7.6}$$

Ce résultat est essentiellement déjà l'identité (7.3). En effet, on écrivant

$$\frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n!n^s} = sn^{-s}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{s}{\ell}\right) = s\exp\left(s\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell} - \log n\right)\right)\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{s}{\ell}\right)e^{-\frac{s}{\ell}},$$

et en laissant n tendre vers l'infini, on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty} sn^{-s}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{s}{\ell}\right) = se^{\gamma s}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{s}{\ell}\right)e^{-\frac{s}{\ell}},$$

ce qui est exactement la formule que l'on voulait montrer. □

Dans la preuve du résultat précédent, on a implicitement déduit une autre représentation pour $\Gamma(s)$, qui mérite son propre théorème.

Théorème 7.2. *On a pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,*

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}. \tag{7.7}$$

Preuve. Pour $s > 0$, on avait déjà montre cette formule en (7.6). Le fait qu'elle soit vraie pour tout les nombres complexes se déduit par prolongement méromorphe. □

Un corollaire immédiat de cette formule est l'identité suivante.

Théorème 7.3 (Formule de réflexion d'Euler)**.** *On a pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{7.8}$$

Preuve. Par (7.7) on peut écrire la côté gauche comme

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}\cdot\frac{n!n^{1-s}}{(1-s)(2-s)\cdots(n+1-s)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!^2 n}{s(n+1-s)(1^2-s^2)(2^2-s^2)\cdots(n^2-s^2)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s}\left(1+\frac{1-s}{n}\right)^{-1}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1-\frac{s^2}{\ell^2}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Ici, on utilise la formule bien connue

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \prod_{\ell=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right),$$

et le résultat suit immédiatement. □

En utilisant la formule (7.8) avec $s = 1/2$ et en notant que $\Gamma(1/2) > 0$, on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{7.9}$$

Une autre formule très utile est la suivante.

Théorème 7.4 (Formule de duplication de Legendre)**.** *On a pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2s}\Gamma(2s).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{4^s\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2s)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}(n!)^2}{(2n)!}\frac{2s(2s+1)\cdots(2s+2n)}{s(s+1)\cdots(s+n)\cdot\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(s+\frac{2n+2}{2}\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!n^{\frac{1}{2}}}\frac{n}{s+n+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ou en autres mots

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = C2^{-2s}\Gamma(2s) \quad \text{avec} \quad C := \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!n^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais en mettant $s = 1$ et en observant (7.9), il suit que

$$C = 2\sqrt{\pi},$$

et on obtient le résultat cherché. $\square$

Plus tard il sera nécessaire de connaître le comportement de la fonction gamma d'une façon très précise. Dans le cas spécial $s \in \mathbb{N}$, c'est à dire pour la factorielle, on a le résultat classique suivant.

Théorème 7.5 (Formule de Stirling pour la factorielle)**.** *On a*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} \quad \textit{pour} \quad n \to \infty.$$

Preuve. En utilisant la représentation de la fonction Gamma comme intégrale, on voit que

$$n! = \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^n \,\mathrm{d}\xi.$$

Ici on fait la substitution $\xi \mapsto \xi\sqrt{n} + n$, ce qui montre que

$$n! = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\xi\sqrt{n}}\,\mathrm{d}\xi,$$

et le théorème suivra, si on peut montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\xi\sqrt{n}}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{2\pi}.$$

Afin de montrer cette égalité, on note que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\xi\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\exp\Big(n\log\Big(1+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\Big)-\xi\sqrt{n}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\exp\Big(\xi\sqrt{n}-\frac{\xi^2}{2}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)-\xi\sqrt{n}\Big)=\exp\Big(-\frac{\xi^2}{2}\Big),\end{aligned}$$

où on a utilisé la série de Taylor du logarithme. En raisonnant similairement comme dans la preuve du théorème 7.1, il suit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty}\Big(1+\frac{\xi}{\sqrt{n}}\Big)^n e^{-\xi\sqrt{n}}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi=\sqrt{2\pi},$$

ce qui conclut la preuve. □

Pour $s\in\mathbb{C}$ on a besoin d'un estimation asymptotique pour $\Gamma(s)$ et c'est le résultat suivant qui en fournit une.

Théorème 7.6. *Soit $\delta>0$. Alors pour tout $s\in\mathbb{C}$ dans la région définie par la condition $|\arg s|\le\pi-\delta$ on a*

$$\log\Gamma(s)=\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\log s-s+\frac{\log 2\pi}{2}+O\Big(\frac{1}{|s|}\Big), \tag{7.10}$$

et

$$\Gamma(s)=\sqrt{2\pi}\,s^{s-\frac{1}{2}}e^{-s}\Big(1+O\Big(\frac{1}{|s|}\Big)\Big).$$

Preuve. La preuve de cette formule se produit en deux étapes. Dans un premier temps on montre que

$$\log\Gamma(s)=\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\log s-s+\frac{\log(2\pi)}{s}+\int_0^\infty\frac{[\xi]-\xi+\frac{1}{2}}{\xi+s}\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.11}$$

et après on prouvera la borne suivante pour l'intégrale à droite,

$$\int_0^\infty\frac{[\xi]-\xi+\frac{1}{2}}{\xi+s}\,\mathrm{d}\xi\ll\frac{1}{|s|}, \tag{7.12}$$

qui est vraie pour tout $s\in\mathbb{C}$ dans la région définie par la condition $|\arg s|\le\pi-\delta$. Cela montrera la première formule, et la deuxième suivra simplement en prenant l'exponentielle.

Afin de prouver (7.11), on considère d'abord l'intégrale

$$I_N(s):=\int_0^N\frac{[\xi]-\xi+\frac{1}{2}}{\xi+s}\,\mathrm{d}\xi, \tag{7.13}$$

où N est un entier naturel et où on suppose que $s\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. On a

$$\begin{aligned}I_N(s)&=\sum_{n=0}^{N-1}\int_n^{n+1}\Big(\frac{n+s+\frac{1}{2}}{\xi+s}-1\Big)\mathrm{d}\xi\\ &=\sum_{n=0}^{N-1}\Big(n+s+\frac{1}{2}\Big)(\log(n+1+s)-\log(n+s))-N\\ &=\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\Big(n+s+\frac{1}{2}\Big)\log(n+1+s)-\Big(n+s-\frac{1}{2}\Big)\log(n+s)\Big)-\sum_{n=0}^{N-1}\log(n+s)-N.\end{aligned}$$

En notant que la première somme est une somme télescopique, cette dernière expression se simplifie en

$$I_N(s) = \left(N+s-\frac{1}{2}\right)\log(N+s) - \left(s+\frac{1}{2}\right)\log s - \sum_{n=1}^{N-1}\log(n+s) - N.$$

À ce point, on transforme les deux derniers termes comme suit,

$$N + \sum_{n=1}^{N-1}\log(n+s) = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\log\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right) + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{s}{n} + N + \log((N-1)!),$$

et ici on utilise le théorème 7.5 pour évaluer la factorielle,

$$N + \log((N-1)!) = \left(N-\frac{1}{2}\right)\log N + \frac{1}{2}\log(2\pi) + o(1).$$

Pour finir, on obtient

$$I_N(s) = I_N^{(1)}(s) + I_N^{(2)}(s) + o(1),$$

où

$$\begin{aligned} I_N^{(1)}(s) &:= -\sum_{n=1}^{N-1}\left(\log\left(1+\frac{s}{n}\right) - \frac{s}{n}\right) - \log s - s\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + s\log N, \\ I_N^{(2)}(s) &:= s\log\left(1+\frac{s}{N}\right) + \left(N-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{s}{N}\right) - \left(s-\frac{1}{2}\right)\log s - \frac{\log(2\pi)}{2}. \end{aligned}$$

À ce point on laisse N tendre vers l'infini. En observant que le théorème 7.1 nous dit que

$$\lim_{N\to\infty} I_N^{(1)}(s) = \Gamma(s),$$

et qu'on a en plus

$$\lim_{N\to\infty} I_N^{(2)}(s) = s - \left(s-\frac{1}{2}\right)\log s - \frac{\log(2\pi)}{2},$$

alors on obtient finalement l'identité (7.13).

Il reste à prouver l'estimation (7.12). On pose

$$\Psi(\xi) := \int_0^{\xi}\left(\lfloor\eta\rfloor - \eta + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\eta.$$

Évidemment on a $\Psi(\xi) \ll 1$, et en intégrant par parties on voit que

$$\int_0^{\infty}\frac{\lfloor\xi\rfloor - \xi + \frac{1}{2}}{\xi+s}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty}\frac{\Psi(\xi)}{(\xi+s)^2}\,\mathrm{d}\xi \ll \int_0^{\infty}\frac{1}{|\xi+s|^2}\,\mathrm{d}\xi$$

Si on pose $\varphi := \arg(s)$ avec $|\varphi| \le \pi - \delta$, alors on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty}\frac{\lfloor\xi\rfloor - \xi + \frac{1}{2}}{\xi+s}\,\mathrm{d}\xi &\ll \frac{1}{|s|}\int_0^{\infty}\frac{1}{|\xi+e^{i\varphi}|^2}\,\mathrm{d}\xi \\ &\ll \frac{1}{|s|}\left(\int_0^{3}\frac{1}{|\operatorname{Im}(e^{i\delta})|}\,\mathrm{d}\xi + \int_3^{\infty}\frac{1}{(\xi-2)^2}\,\mathrm{d}\xi\right) \ll \frac{1}{|s|}, \end{aligned}$$

ce qui montre (7.12). Cela conclut la preuve. □

Comme un corollaire du théorème précédent, on a le résultat suivant, qui donne une approximation de la valeur absolue de la fonction gamma dans des bandes verticales.

Corollaire 7.1. *Soit σ_1, σ_2 et t_0 des nombres réels tels que $\sigma_2 > \sigma_1$ et $t_0 > 0$. Alors on a*

$$|\Gamma(\sigma+it)| = \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\left(1+O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$$

pour tout $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ tels que $\sigma_1\le\sigma\le\sigma_2$ et $|t|\ge t_0$.

Preuve. À venir... □

7.2 L'équation fonctionnelle

On a déjà montré comment la fonction $\zeta(s)$, définie initialement pour $\mathrm{Re}(s)>1$, se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\mathrm{Re}(s)>0$. Mais comme on verra maintenant, cela n'est pas toute la vérité, car $\zeta(s)$ se prolonge en fait au tout le plan complexe. En même temps, on montrera aussi que cette fonction satisfait une certaine équation fonctionnelle, qui joue un rôle très important.

Théorème 7.7. *La fonction $\zeta(s)$ se prolonge méromorphiquement à tout le plan complexe et y vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{7.14}$$

Le seul pôle de $\zeta(s)$ se trouve en $s=1$, où elle possède un pôle simple de résidu 1.

On note qu'en utilisant les théorèmes (7.3) et (7.9) l'équation fonctionnelle (7.14) prend aussi la forme

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{7.15}$$

Grâce au fait que la fonction zêta de Riemann et la fonction gamma ne s'annulent pas dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>1$, cette identité montre en particulier que les zéros de $\zeta(s)$ avec $\mathrm{Re}(s)<0$ se trouvent exactement en $s=-2,-4,-6,\ldots$. On les appelle les zéros triviaux de $\zeta(s)$. Par contre, tout les autres zéros – appelés les zéros non triviaux – doivent se trouver dans la bande $0\le\mathrm{Re}(s)\le 1$, aussi appelée la bande critique.

En vue de l'équation fonctionnelle, il est parfois utile de définir la fonction

$$\xi(s) := s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{7.16}$$

qui est aussi appelée la fonction xi de Riemann. C'est une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{C}$ et qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{7.17}$$

De plus, les zéros de cette fonction sont exactement les zéros non triviaux de $\zeta(s)$.

La preuve du théorème 7.7 repose essentiellement sur la formule sommatoire de Poisson, qui on utilisera dans la forme simple suivante.

Théorème 7.8 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que $f(\xi) \ll \xi^{-N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n),$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f, qui est définie comme

$$\hat{f}(n) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i n\xi}\, d\xi.$$

Afin de montrer le théorème 7.7, dans un premier temps on considère la fonction $\theta : (0,\infty) \to \mathbb{C}$, qui est définie par la série

$$\theta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}.$$

Notons que cette série converge effectivement pour tout $x > 0$, car on a

$$|\theta(x)| \leq 1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi^2 x}\, \mathrm{d}\xi \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

En observant que pour $x \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = e^{-\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)x} \leq e^{-\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \ll e^{-\pi x},$$

on obtient de plus l'estimation suivante,

$$\theta(x) = 1 + O\big(e^{-\pi x}\big) \quad \text{pour} \quad x \geq 1.$$

La fonction $\theta(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante, qui est au cœur de la preuve du Théorème 7.7.

Lemme 7.9. *On a pour tout $x > 0$,*

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Preuve. On commence avec l'utilisation de la formule sommatoire de Poisson à la fonction $\xi \mapsto e^{-\pi\xi^2 x}$, qui mène à

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi^2 x} e^{-2\pi i n\xi}\, \mathrm{d}\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(\xi^2 - 2\mathrm{i}n\frac{\xi}{x}\right)}\, \mathrm{d}\xi.$$

En complétant le carré dans l'exposant, cette dernière expression se transforme en

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(\xi^2 - 2\mathrm{i}n\frac{\xi}{x}\right)}\, \mathrm{d}\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi x \frac{-n^2}{x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(\xi - \frac{in}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}\xi.$$

Dans ce qui suit on évaluera explicitement l'intégrale sur ξ à droite et on montrera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(\xi - \frac{in}{x}\right)^2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{x}}, \tag{7.18}$$

ce qui par conséquent mènera à l'équation fonctionnelle cherchée.

Soit $S \geq 1$. Par le théorème des résidus, on a

$$\int_{-S}^{S} e^{-\pi x\left(\xi-\frac{in}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-S}^{S} e^{-\pi x\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + \mathrm{i}\int_{-\frac{n}{x}}^{0} e^{-\pi x(-S+\mathrm{i}\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{i}\int_{0}^{-\frac{n}{x}} e^{-\pi x(S+\mathrm{i}\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta.$$

Pour les deux intégrales sur η on a la borne

$$\mathrm{i}\int_{-\frac{n}{x}}^{0} e^{-\pi x(-S+\mathrm{i}\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta + \mathrm{i}\int_{0}^{-\frac{n}{x}} e^{-\pi x(S+\mathrm{i}\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta \ll \frac{n}{x}e^{-\pi xS^2+\pi x\frac{n^2}{x^2}},$$

et en laissant S tendre vers l'infini, on voit alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\left(\xi-\frac{in}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Cela montre (7.18) et conclut la preuve. □

Maintenant on est prêt à prouver le théorème 7.7. En faisant la substitution $\xi \mapsto \pi n^2\xi$ en (7.1), on voit que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi n^2 \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2\xi}(\pi n^2\xi)^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}\xi,$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, ce qui mene à

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2\xi}\xi^{\frac{s}{2}-1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Ici on somme n sur tous les nombres naturels et on obtient la représentation suivante de $\zeta(s)$ comme intégrale

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\theta(\xi)-1)\xi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi},$$

valide initialement dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Ici l'idée est d'exprimer l'intégrale à droite qui n'est convergente que dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ de façon à ce qu'elle devienne une expression qui converge pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. En effet, on écrit

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\theta(\xi)-1)\xi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\int_0^{1}(\theta(\xi)-1)\xi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(\xi)-1)\xi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi},$$

et en utilisant l'équation fonctionnelle de $\theta(x)$ dans la première intégrale du RHS, cette expression devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{1}(\theta(\xi)-1)\xi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= \frac{1}{2}\int_0^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\theta\left(\frac{1}{\xi}\right)-1\right)\xi^{\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\sqrt{\xi}\theta(\xi)-1\right)\xi^{-\frac{s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(\xi)-1)\xi^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Après tout on obtient

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = -\frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\theta(\xi)-1)\Big(\xi^{\frac{s}{2}} + \xi^{\frac{1-s}{2}}\Big)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

Ici il faut noter que l'intégrale converge pour tout $s \in \mathbb{C}$. Par conséquent le RHS définit une fonction méromorphe, ce qui nous donne le prolongement méromorphe de $\zeta(s)$ décrit dans le théorème 7.7. De plus, le RHS reste inchangé si on remplace s avec $1-s$, ce qui montre l'équation fonctionnelle (7.14).

En ce qui concerne les pôles de $\zeta(s)$, on avait déjà vu que le seul pôle dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ se trouve en $s = 1$, et que c'est un pôle simple. Par l'équation fonctionnelle que l'on vient de prouver, et par le fait que $\Gamma(s)$ a un pôle simple en $s = 0$, il est pourtant clair que $\zeta(s)$ n'a pas d'autres pôles dans $\mathbb{C}$.

7.3 Fonctions d'ordre 1

On a déjà vu que la fonction $\zeta(s)$ s'écrit pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ comme un produit infini qui va sur tous les nombres premiers. Le but de cette section est de prouver une autre représentation de $\zeta(s)$ comme produit infini. Cette fois c'est un produit qui est indexé par ses zéros et qu'on appelle la factorisation de Hadamard de $\zeta(s)$. Comme cette factorisation est valable pour une classe très générale de fonctions holomorphes, on développera la théorie dans un premier temps pour des fonctions holomorphes générales, afin de l'appliquer ensuite au cas spécial $\zeta(s)$.

Un théorème bien connu de l'analyse complexe dit que tout fonction entière f, qui satisfait la borne $f(s) \ll |s|^\alpha$ pour un réel $\alpha \geq 0$, est en fait un polynôme de degré au plus α. Le lemme suivant est une variation de ce résultat qui requiert des conditions plus faibles.

Lemme 7.10. *Soient $C, \alpha > 0$ des constantes réelles. Si f est une fonction entière qui satisfait la condition*

$$\mathrm{Re}\, f(s) \leq C(1+|s|^\alpha) \quad \textit{pour tout} \quad s \in \mathbb{C}, \tag{7.19}$$

alors f est un polynôme de degré au plus α.

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer que f s'annule en 0, car sinon on simplement remplace la fonction $f(s)$ par $f(s) - f(0)$.

Alors on peut exprimer cette fonction comme une série de Taylor

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \mathrm{i}b_n)s^n$$

qui converge pour tout $s \in \mathbb{C}$. Pour des nombres complexe donnés en coordonnées polaires $s = re^{2\pi\mathrm{i}\theta}$ la partie réelle de $f(s)$ s'exprime de façon simple comme

$$\mathrm{Re}\, f(re^{2\pi\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n\theta) r^n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n\theta).$$

Ici on multiplie les deux côtés par $\cos(2\pi\ell\theta)$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, et on prend l'intégral sur θ afin d'obtenir l'identité

$$2\int_0^1 \mathrm{Re}\, f(re^{\mathrm{i}\theta})\cos(2\pi\ell\theta)\,\mathrm{d}\theta = a_\ell r^\ell.$$

Notons qu'il suit de même manière que

$$\int_0^1 \operatorname{Re} f(re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

En utilisant la condition (7.19), on obtient la borne suivante pour les coefficients a_ℓ,

$$|a_\ell| \leq \frac{2}{{r_j}^\ell}\int_0^1 |\operatorname{Re} f(r_j e^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{{r_j}^\ell}\int_0^1 \big(|\operatorname{Re} f(r_j e^{\mathrm{i}\theta})| + \operatorname{Re} f(r_j e^{\mathrm{i}\theta})\big)\,\mathrm{d}\theta$$
$$\leq \frac{4}{{r_j}^\ell}\int_0^1 \max\big\{0, \operatorname{Re} f(r_j e^{\mathrm{i}\theta})\big\}\,\mathrm{d}\theta \ll {r_j}^{\alpha-\ell},$$

et en laissant j tendre vers l'infini, il suit que $a_\ell = 0$, à condition que $\ell > \alpha$.

Le même raisonnement, en remplaçant $\cos(2\pi\ell\theta)$ par $\sin(2\pi\ell\theta)$ dans l'intégrale sur θ, montre que $b_\ell = 0$ pour tout $\ell > \alpha$. Par conséquent on voit que f est bien un polynôme de degré au plus α comme on voulait le montrer. □

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On dit que la fonction f est d'ordre borné s'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que f satisfait la condition

$$f(s) = O(\exp(|s|^\alpha)) \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathbb{C}.$$

Si f est d'ordre borné, le nombre

$$\inf\{\alpha \geq 0 : f(s) \ll \exp(|s|^\alpha)\}$$

est appelé l'ordre de f.

Si f est une fonction d'ordre borné qui n'a pas de zéros sur $\mathbb{C}$, le lemme suivant montre que f doit avoir une forme très spécifique.

Lemme 7.11. *Soit f une fonction entière d'ordre borné qui ne s'annule par sur $\mathbb{C}$. Alors elle est de la forme*

$$f(s) = \exp(P(s)),$$

où P est un polynôme de degré au plus l'ordre de f.

Preuve. Soit α l'ordre de f. Comme f ne s'annule pas, la fonction $\log f(s)$ est bien définie et on a l'estimation

$$\operatorname{Re}\log f(s) \ll |s|^{\alpha+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Le résultat suit alors en appliquant le lemme 7.10. □

Bien sûr il sera nécessaire d'étudier aussi des fonctions d'ordre fini qui possèdent des zéros. Le théorème suivant se rendra utile pour contrôler les nombres de zéros de telles fonctions.

Théorème 7.12 (Formule de Jensen). *Soit $R > 0$. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque $\{s \in \mathbb{C} : |s| \leq R\}$, qui ne s'annule ni en 0 ni sur le cercle $\{s \in C : |s| = R\}$. Alors on a l'égalité*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big|f(Re^{i\theta})\big|\,\mathrm{d}\theta = \log|f(0)| + \sum_\rho \log\frac{R}{|\rho|},$$

où ρ parcourt l'ensemble de zéros de f de module borné par R, comptés avec multiplicité.

Preuve. On factorise f en

$$f(s) = \tilde{f}(s) \prod_{\rho} (s-\rho),$$

où $\tilde{f}$ est une fonction holomorphe, qui ne s'annule pas pour $|s| \le R$. On a alors

$$\log|f(s)| = \log\left|\tilde{f}(s)\right| + \sum_{\rho} \log|s-\rho|,$$

et on voit qu'il suffira de montrer l'énoncé du théorème pour deux cas spéciaux, d'une part le cas où f est une fonction qui ne s'annule pas pour $|s| \le R$, et d'autre part le cas où f est de la forme $f(s) = s - \zeta$ avec $|\zeta| < R$.

On commence avec le premier cas. Comme on suppose que f ne s'annule pas dans le disque $|s| \le R$, le logarithme $\log f(s)$ est bien défini et holomorphe au voisinage du disque de rayon R. Par la formule de Cauchy on a alors

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|s|=R} \frac{\log f(s)}{s} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(Re^{\mathrm{i}\theta}) \, \mathrm{d}\theta,$$

en en prenant la partie réelle aux deux côtés,

$$|\log f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta.$$

Ensuite on considère le cas où f est donnée par $f(s) = s - \zeta$ avec $|\zeta| < R$. On écrit cette fonction comme le produit $f = f_1 f_2$ avec

$$f_1(s) := \frac{f(s)}{R^2 - \overline{\zeta} s} \quad \text{et} \quad f_2(s) := R^2 - \overline{\zeta} s,$$

et alors on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f_1(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f_2(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta.$$

On peut évaluer la première intégrale à droite facilement en notant que $|f_1(s)| = 1/R$ pour $|s| = R$. En ce qui concerne la deuxième, observons que f_2 ne s'annule pas dans $|s| \le R$, ce qui nous permet d'appliquer ce qu'on a déjà montré au-dessus. Cela nous donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{\mathrm{i}\theta})\right| \mathrm{d}\theta = -\log R + |\log f_2(0)| = |\log f(0)| + \log \frac{R}{|\zeta|},$$

et conclut la preuve. □

Le théorème suivant est essentiellement un corollaire simple de la formule de Jensen.

Théorème 7.13. *Soit $\varepsilon > 0$. Soit f une fonction entière d'ordre α. Alors pour tout $R \ge 1$,*

$$\sum_{|\rho| \le R} 1 \ll R^{\alpha+\varepsilon},$$

où la somme va sur tous les zéros de f de module borné par R, comptés avec multiplicité.

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer que $f(s) \neq 0$, car sinon on peut remplacer $f(s)$ par la fonction $f(s)s^{-m}$ pour un entier m convenable. De plus, on peut supposer que f ne s'annule pas sur le cercle de rayon $3R$, car sinon on remplace R simplement par $R+\delta$ avec un réel $\delta \in (0,1]$.

Par la formule de Jensen et par le fait que f est d'ordre α, il suit alors

$$\sum_{|\rho|\leq R} 1 \leq \sum_{|\rho|\leq 3R} \log \frac{3R}{|\rho|} = -\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(3Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \ll R^{\alpha+\varepsilon},$$

ce qui est déjà l'estimation que l'on veut montrer. □

Une conséquence immédiate de ce résultat est que si f est une fonction entière d'ordre α, alors la somme

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1+|\rho|^{\alpha+\varepsilon}}$$

est convergente pour tout $\varepsilon > 0$, où la somme va comme d'habitude sur tous les zéros de f, comptés avec multiplicité.

Maintenant on a tous les outils afin de prouver le résultat principal de cette section.

Théorème 7.14 (Factorisation de Hadamard)**.** *Soit f une fonction entière d'ordre au plus* 1*. On pose $k=0$ si $f(0)\neq 0$, et sinon on définit k comme l'ordre du zéro en* 0 *de f. Alors il existe des constantes $A,B\in\mathbb{C}$ telles que*

$$f(s) = e^{A+Bs} s^k \prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}, \tag{7.20}$$

où ρ parcourt l'ensemble de zéros de f non nuls et où le produit converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$.

Preuve. Sans perte de généralité on peut supposer que $f(0)\neq 0$.

Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Le nombre de zéros de f contenu dans K est fini, et on a

$$\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}} = 1 + O\left(\frac{1}{|\rho|^2}\right)$$

uniformément pour tout $s\in K$ et tous les zéros $\rho\notin K$. Par la remarque suivant le théorème 7.13, il suit que le produit

$$P(s) := \prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

converge sur les compacts de $\mathbb{C}$ et définit une fonction entière.

En particulier, le quotient $f(s)/P(s)$ est une fonction entière qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. On montre maintenant que cette fonction est d'ordre au plus 1. Au vu du lemme 7.11, cela montrera le théorème.

Comme on a déjà par l'hypothèse une borne pour $f(s)$, ce qui est nécessaire est une borne inférieure pour $P(s)$. Soit $\varepsilon>0$, et supposons pour le moment que R soit un réel positif tel que

$$\big|R-|\rho|\big| > \frac{1}{|\rho|^2} \quad \text{pour tout les zéros } \rho. \tag{7.21}$$

On estime $P(s)$ sur le cercle $|s|=R$.

Pour les zéros ρ tels que $|\rho| \le R/2$, on a

$$\left|\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right| \ge \left(\left|\frac{s}{\rho}\right|-1\right)e^{-\left|\frac{s}{\rho}\right|} > \exp\left(-\frac{R}{|\rho|}\right),$$

est par conséquent on a pour R suffisamment grand,

$$\left|\prod_{|\rho|\le\frac{R}{2}}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right| > \exp\left(-\sum_{|\rho|\le\frac{R}{2}}\frac{1}{|\rho|}\right) > \exp\left(-R^{1+\varepsilon}\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^{1+\varepsilon}}\right) > \exp\left(-R^{1+2\varepsilon}\right). \tag{7.22}$$

Si ρ est un zéro tel que $|\rho| > 2R$, alors un utilise l'inégalité

$$\left|(1-\zeta)e^{\zeta}\right| > e^{-c|\zeta|^2} \quad \text{pour} \quad |\zeta| < \frac{1}{2},$$

qui est vraie si la constante c est choisie suffisamment petite. Alors

$$\left|\prod_{|\rho|>2}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right| > \exp\left(-c\sum_{|\rho|>2R}\frac{|R|^2}{|\rho|^2}\right) > \exp\left(-cR^{1+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s|^{1+\varepsilon}}\right) > \exp\left(-R^{1+2\varepsilon}\right). \tag{7.23}$$

Finalement, pour les zéros ρ tels que $R/2 < |\rho| \le 2R$, on utilise la condition (7.21), qui mène à

$$\left|\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right| \ge e^{-2}\left|1-\frac{s}{\rho}\right| \ge e^{-2}\frac{|R-|\rho||}{2R} > \frac{1}{2e^2R^3},$$

et comme il y a au plus $O\left(R^{1+\varepsilon}\right)$ zéros ρ tels que $R/2 \le |\rho| \le 2R$, il suit que

$$\prod_{\frac{R}{2}<|\rho|\le 2R}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}} > (2e^2R^3)^{-R^{1+\varepsilon}} > \exp\left(-R^{1+\varepsilon}\right). \tag{7.24}$$

En somme, en rassemblant les estimations (7.22), (7.23) et (7.24), on obtient

$$|P(s)| > \exp\left(-3R^{1+2\varepsilon}\right) > \exp\left(-R^{1+3\varepsilon}\right)$$

pour R suffisamment large. Comme f est d'ordre 1, il suit que

$$\frac{f(s)}{P(s)} \ll \exp\left(R^{1+4\varepsilon}\right) \quad \text{pour} \quad |s| = R. \tag{7.25}$$

Notons maintenant que grâce au fait que la somme

$$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$$

est convergente, il est possible de trouver une suite de réels $\{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{j\to\infty} R_j = \infty \qquad \text{et} \qquad |R_{j+1}-R_j| \le 1 \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{N}.$$

En appliquant l'estimation (7.25) pour les valeurs de cette suite et en utilisant le principe du maximum, il suit que

$$\frac{f(s)}{P(s)} \ll \exp\left((|s|+1)^{1+4\varepsilon}\right) \ll \exp\left(|s|^{1+5\varepsilon}\right),$$

et on voit enfin que $f(s)/P(s)$ est en effet une fonction d'ordre au plus 1. $\square$

On avait déjà vu quelques exemples de factorisation de Hadamard de fonctions entières. En particulier, la représentation donnée au théorème 7.1 n'est rien d'autre que la factorisation de Hadamard de l'inverse de la fonction gamma. Aussi la formule bien connue

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \prod_{\ell=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

est simplement la factorisation de Hadamard du sinus (cf série 11.1). Dans la section suivante on étudiera la factorisation de Hadamard $\xi(s)$.

7.4 La factorisation de Hadamard de $\xi(s)$

Aussi la fonction $\xi(s)$ possède une factorisation de Hadamard. Afin de pouvoir constater les résultats de manière simple, dans tout la suite on adopte la convention que la variable ρ dans des sommes et produits comme par exemple

$$\sum_\rho (\dots) \quad \text{ou} \quad \prod_\rho (\dots)$$

dénote seulement les zéros non triviaux de $\zeta(s)$, compté avec multiplicité.

Théorème 7.15 (Factorisation de Hadamard de $\xi(s)$)**.** *On a*

$$\xi(s) = e^{Bs}\prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}, \tag{7.26}$$

où B est une constante complexe.

Preuve. Comme la fonction $\xi(s)$ est entière, afin d'appliquer le théorème 7.14, il faut seulement vérifier qu'elle est d'ordre au plus 1. Grâce à l'équation fonctionnelle (7.17), il suffit d'estimer la fonction $\xi(s)$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2$. Par le corollaire 7.1, on a

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \ll e^{|s|\log|s|}.$$

Afin d'estimer $\zeta(s)$, on utilise sa représentation comme intégrale (6.5) et on obtient

$$(s-1)\zeta(s) \ll |s|^2. \tag{7.27}$$

Les autres facteurs se bornent de façon triviale, et on voit qu'en effet $\xi(s)$ est une fonction d'ordre au plus 1.

Le théorème 7.14 nous dit qu'alors $\xi(s)$ s'exprime comme le produit infini (7.26) sauf qu'il y a encore une constante A dans l'exposant. Mais en notant que

$$\xi(0) = \xi(1) = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1,$$

il suit que $A = 1$ et le théorème est montré. □

Il s'avèrera que les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ jouent un rôle pertinent pour la répartition des nombres premiers. On finit ce chapitre avec quelques résultats simples sur ces zéros, qui sont des conséquences de la théorie développée dans la section précédente.

Jusqu'ici on ne sait même pas s'il existe des zéros non triviaux. Le théorème suivant montre qu'en fait il en existe un nombre infini.

Théorème 7.16. *L'ensemble des zéros non triviaux de $\zeta(s)$ est infini. De plus, la somme*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{\sigma}} \tag{7.28}$$

est convergent pour tout $\sigma > 1$, mais divergente pour $\sigma = 1$.

Preuve. Le fait que la somme (7.28) converge pour $\sigma > 1$ est une consequence du Théorème 7.13. Supposons qu'elle converge aussi pour $\sigma = 1$. En utilisant l'inégalité

$$\left|(1-\zeta)e^{\zeta}\right| < e^{2|\zeta|} \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

il suit que

$$\xi(s) \ll \exp(C|s|) \quad \text{avec} \quad C := \left(|B| + 2\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|}\right).$$

Par contraire, on a pour s réel et suffisamment large

$$\xi(s) > \exp\left(\frac{s\log s}{4}\right).$$

Alors la somme (7.28) doit être divergente pour $\sigma = 1$, et par conséquent il doit exister un nombre infini des zéros non triviaux de $\zeta(s)$. □

Une conséquence de ce résultat est que la limite

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{|\rho|\le x} \frac{1}{\rho} \tag{7.29}$$

est convergente, car ρ est un zéro non trivial de $\zeta(s)$, alors sa conjugué $\overline{\rho}$ l'est aussi, et on a

$$0 \le \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\overline{\rho}} = \frac{2\operatorname{Re}\rho}{|\rho|^2} \le \frac{2}{|\rho|^2}.$$

On utilisera la notation

$$\sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$$

pour désigner la limite (7.29), mais il faut toujours se souvenir cette somme ne converge pas absolument et que sa valeur dépend de l'ordre de la sommation.

Maintenant, on peut aussi évaluer la constante b en termes des zéros non triviaux de $\zeta(s)$. On commence par prendre la dérivée logarithmique sur les deux côtés de (7.26), ce qui mène à

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = B + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{7.30}$$

Par l'équation fonctionnelle de la dérivée logarithmique de $\xi(s)$, qui prend la forme

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = -\frac{\xi'}{\xi}(1-s),$$

on a aussi

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = -B - \sum_{\rho}\left(\frac{1}{1-s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right). \tag{7.31}$$

En comparant (7.30) et (7.31), on obtient l'expression suivante pour la constante B,

$$B = -\sum_{\rho} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\sum_{\rho} \frac{1}{\rho - s} - \sum_{\rho} \frac{1}{1-\rho-s}\right) = -\sum_{\rho} \frac{1}{\rho},$$

où on a utilisé le fait que si ρ est un zéro de $\zeta(s)$, alors $1-\rho$ l'est aussi.

Ensuite, il sera nécessaire d'avoir une estimation pour le nombre de zéros non triviaux avec partie imaginaire bornée par une constante. Cela se fera en utilisant la formule de Jensen, et on aura besoin d'une estimation pour $\zeta(s)$, donnée dans le lemme suivant.

Lemme 7.17. *Il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\zeta(s) \ll t^k$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ dans la région $\sigma \geq -5$ et $|t| \geq 1$.

Preuve. Pour $\sigma \geq 2$ on a bien évidemment $\zeta(s) \ll 1$. Comme on avait déjà vu en (7.27), on a pour $1/2 \leq \sigma \leq 2$,

$$\zeta(s) \ll |s|^2 \ll t^2.$$

Finalement, pour $-5 \leq \sigma \leq 1/2$ la borne découle de l'équation fonctionnelle et des bornes déjà montrées. □

On désigne par $N(T)$ le nombre de zéros non triviaux de $\zeta(s)$, comptés avec leur multiplicité, qui ont une partie imaginaire bornée par un réel $T \geq 0$. En autres mots,

$$N(T) := \sum_{\rho:\, |\mathrm{Im}(\rho)| \leq T} 1.$$

Le lemme suivant donne une estimations très simple de $N(T)$.

Lemme 7.18. *On a pour $T \geq 2$,*

$$N(T) - N(T-1) \ll \log T \quad \textit{et} \quad N(T) \ll T \log T. \tag{7.32}$$

Preuve. Soit $\tau := 2 + \mathrm{i}T$, et soit $r \in [3,4]$ tel que

$$\zeta\big(\tau + re^{2\pi \mathrm{i}\theta}\big) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Par la formule de Jensen et Lemme 7.17, on a

$$\sum_{\rho:\, |\rho-\tau| \leq r} \log \frac{r}{|\rho - \tau|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|\zeta\big(\tau + re^{\mathrm{i}\theta}\big)\right| \mathrm{d}\theta - \log|\tau| \ll \log T.$$

En observant que la distance entre le point τ et tous les zéros ρ avec $|\mathrm{Im}\,\rho - T| \leq 1$ est bornée par $\sqrt{5} < 3$, on obtient

$$\begin{aligned} N(T) - N(T-1) &\leq \left(\log \frac{r}{\sqrt{5}}\right)^{-1} \sum_{\rho:\, |\rho-\tau| \leq \sqrt{5}} \log \frac{r}{|\rho - \tau|} \\ &\leq \left(\log \frac{r}{\sqrt{5}}\right)^{-1} \sum_{\rho:\, |\rho-\tau| \leq r} \log \frac{r}{|\rho - \tau|} \ll \log T, \end{aligned}$$

montrant la première estimation en (7.32). La deuxième en est une conséquence immédiate. □

Chapitre 8

Le théorème des nombres premiers

Maintenant on a tous les outils pour donner la preuve du théorème des nombres premiers. En résumé, l'idée est d'utiliser la formule de Perron pour écrire la fonction $\psi(x)$ comme une intégrale complexe de la forme

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s \quad \text{pour} \quad x \notin \mathbb{Z},$$

avec $c > 1$, et alors de déplacer la ligne d'intégration à gauche à travers la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$. Ensuite on déplace la ligne d'intégration à gauche et finalement laisse c tendre vers l'infini. Le résidu en $s = 1$, que l'on rassemblera dans cette procédure, donnera le terme principal de la formule asymptotique.

Mais on peut aussi aller en dehors, et laisser c tendre vers l'infini en rassemblant tout les autres pôles de $\zeta'/\zeta(s)$. La formule qui résulte de cette procédure, mène non seulement à une formule asymptotique pour $\psi(x)$ plus forte, mais en plus elle montre de manière plus claire le lien entre la répartition des nombres premiers et les zéros de $\zeta(s)$. Cette formule est connue comme la formule explicite.

8.1 La dérivée logarithmique de $\zeta(s)$

Comme on a déjà vu, la série de Dirichlet associée à la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$ est donnée par

$$L_\Lambda(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s),$$

ce qui nécessite l'étude de la dérivée logarithmique de $\zeta(s)$ dans un certain détail, qui est le but de cette section.

Commençons par mentionner que la dérivée logarithmique de $\zeta(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ de résidu -1 qui découle du pôle de $\zeta(s)$, et que tout les autres pôles se trouvent exactement aux points où $\zeta(s)$ s'annule. Afin de pouvoir effectuer l'idée décrite au-dessus, il est pertinent de limiter la zone où on peut trouver ces pôles. On fera cela dans la section suivante, mais ici on s'intéresse plutôt au comportement général de $\zeta'/\zeta(s)$ dans les différentes régions du plan complexe.

En ce qui concerne le comportement dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 2$, il n y a pas beaucoup à dire, car on peut y borner cette fonction simplement par

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} \ll 1. \tag{8.1}$$

Par l'équation fonctionnelle cela nous donne aussi une borne dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \leq -1$, puisqu'en prenant la dérivée logarithmique aux deux côtés de (7.15) et en utilisant le théorème 7.3, on voit que

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(1-s) = \log 2\pi - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi s}{2}\right) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s),$$

et par (8.1) et la formule de Stirling, on obtient alors la borne

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll \log|s|, \tag{8.2}$$

qui est valide dans la région donnée par les conditions

$$\mathrm{Re}(s) < -1 \quad \text{et} \quad |s+2n| > \frac{1}{4} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il reste à déterminer le comportement dans la bande $-1 < \mathrm{Re}(s) < 2$, ce qui est en fait le cas le plus important.
On donne le résultat dans le lemme suivant.

Lemme 8.1. *On a, pour tout $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ avec $-1 < \sigma < 2$ et $|t| \geq 1$,*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho:\,|\mathrm{Im}(s-\rho)|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(1 + |\log s|).$$

Preuve. Notons d'abord qu'à cause de la relation

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\bar{s}) = \overline{\frac{\zeta'}{\zeta}(s)} \quad \text{pour} \quad s \in \mathbb{C},$$

il suffit de traiter le cas $t \geq 1$.

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, on peut prendre la dérivée des deux côtés de (7.10), et on obtient la formule asymptotique

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \tag{8.3}$$

Ensuite, on prend la dérivée logarithmique des deux côtés de (7.16), et par (7.30) et (8.3), on voit que

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) + O(\log t).$$

Ici on utilise cette formule avec $s = 2 + it$, et après le soustraire de la même expression (?)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right) + O(\log t). \tag{8.4}$$

Pour tous les ρ avec $|\operatorname{Im}\rho - t| \le 1$, on a

$$\sum_{\rho\colon |\operatorname{Im}\rho - t|\le 1} \frac{1}{|2+\mathrm{i}t-\rho|} \le \sum_{\rho\colon |\operatorname{Im}\rho - t|\le 1} 1 \ll \log t, \tag{8.5}$$

où on a utilisé le théorème 7.18. En ce qui concerne les ρ avec $|\operatorname{Im}\rho - t| > 1$, notons que

$$|s-\rho| \asymp |t - \operatorname{Im}\rho|.$$

Alors

$$\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+\mathrm{i}t-\rho} = \frac{2-\sigma}{(s-\rho)(2+\mathrm{i}t-\rho)} \ll \frac{1}{|t-\operatorname{Im}\rho|^2}.$$

et pour tout $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}$,

$$\sum_{\rho\colon n\le \operatorname{Im}\rho - t\le n+1} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+\mathrm{i}t-\rho}\right) \ll \sum_{\rho\colon n\le \operatorname{Im}\rho - t\le n+1} \frac{1}{|t-\operatorname{Im}\rho|^2} \ll \frac{\log|t+n|}{n^2},$$

où on a utilisé encore une fois le théorème 7.18. En sommant sur n, cela nous donne l'estimation

$$\sum_{\rho\colon |\operatorname{Im}\rho - t|> 1} \left(\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+\mathrm{i}t-\rho}\right) \ll \log t. \tag{8.6}$$

Le résultat suit en combinant la formule (8.4) avec les estimations (8.5) et (8.6). □

8.2 La formule explicite

Ici on se met à déduire rigoureusement la formule explicite déjà mentionnée au-dessus. Afin de la formuler de manière convenable, définissons

$$\psi_0(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ \psi(x) - \frac{\Lambda(x)}{2} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Alors la formule explicite est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 8.2 (Formule explicite). *On a, pour $x > 2$,*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Afin de prouver le théorème des nombres premiers, il sera avantageux de travailler plutôt avec une formule un peu différente, où on n'aura pas à faire avec une série qui ne converge que conditionnellement. Le théorème suivant est une sorte d'approximation à la formule explicite, qui est plus simple à utiliser, et à partir duquel on obtient aussi le théorème 8.2 comme un corollaire immédiat.

Théorème 8.3 (Formule explicite pour $\psi_0(x)$, version utile). *On a, pour $x, T > 2$,*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho\colon |\operatorname{Im}\rho| < T} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + R(x,T), \tag{8.7}$$

où le terme d'erreur $R(x,T)$ est borné par

$$R(x,T) \ll \frac{x}{T}(\log xT)^2 + (\log x)\min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right),$$

avec

$$\langle \xi \rangle := \min\left\{\left|\xi - p^\ell\right| : p \in \mathbb{P},\ \ell \in \mathbb{N},\ \xi \ne p^\ell\right\}.$$

Preuve. On commence en utilisant le théorème 5.10 avec $c = 1 + (\log x)^{-1}$, ce qui nous donne

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^c \Lambda(n)}{n^c \left(1 + T \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} \right).$$

À partir d'ici, la preuve se déroulera en deux étapes. D'abord on estimera le terme d'erreur en montrant que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^c \Lambda(n)}{n^c \left(1 + T \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} \ll \frac{x(\log x)^2}{T} + \min\left\{ \log x, \frac{x \log x}{T \langle x \rangle} \right\}. \tag{8.8}$$

Ensuit, on montrera que

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \tag{8.9}$$

Pour montrer (8.8), on sectionne la somme en trois parties,

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \notin (x/2, 2x)}} (\ldots), \quad \Sigma_2 := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \in (x/2, x]}} (\ldots) \quad \text{et} \quad \Sigma_2 := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \in (x, 2x)}} (\ldots).$$

Dans la somme Σ_1 on a $|\log(x/n)| \gg 1$, ce qui nous permet de la borner simplement par

$$\Sigma_1 \ll \frac{x}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \ll \frac{x}{T} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(c) \right| \ll \frac{x \log x}{T},$$

où la dernière inégalité suit du fait que $\zeta'/\zeta(s)$ possède un pôle simple en $s = 1$.

Afin d'estimer la deuxième somme Σ_2, on pose

$$x_0 := \max\left\{ p^\ell : p \in \mathbb{P},\ \ell \in \mathbb{N},\ p^\ell < x \right\}.$$

Notons que l'on a $\Lambda(n) = 0$ pour tout $x_0 < n < x$, et que par conséquent on peut supposer que $x/2 < x_0 < x$, car sinon la somme vaudrait 0. Pour $x/2 < n < x_0$ on a

$$\log\left(\frac{x}{n}\right) \geq \log\left(\frac{x_0}{n}\right) = -\log\left(1 - \frac{x_0 - n}{x_0}\right) \geq \frac{x_0 - n}{x_0},$$

et alors

$$\sum_{x/2 < n < x_0} \frac{x^c \Lambda(n)}{n^c \left(1 + T \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|\right)} \ll \frac{x_0}{T} \sum_{n < x_0} \frac{\Lambda(n)}{x_0 - n} \ll \frac{x(\log x)^2}{T}.$$

On l'estime le terme à $n = x_0$ en observant que

$$\log\left(\frac{x}{x_0}\right) - \log\left(1 - \frac{x - x_0}{x}\right) \geq \frac{x - x_0}{x} \geq \frac{\langle x \rangle}{x},$$

par

$$\frac{x^c \Lambda(x_0)}{{x_0}^c (1 + T |\log(x/x_0)|)} \ll \min\left\{ \log x, \frac{x \log x}{T \langle x \rangle} \right\}.$$

En somme, on obtient

$$\Sigma_2 \ll \frac{x(\log x)^2}{T} + \min\left\{ \log x, \frac{x \log x}{T \langle x \rangle} \right\}.$$

La même borne s'applique aussi à la somme Σ_3, comme on peut montrer de façon similaire. En résumé, ces estimations nous donnent (8.8).

On prouve maintenant (8.9). Observons que si ω est un zéro de $\zeta(s)$, alors

$$\operatorname*{Res}_{s=\omega}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\right)=\frac{x^\omega}{\omega}.$$

De plus, on a

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\right)=\frac{\zeta'}{\zeta}(0)\quad\text{et}\quad\operatorname*{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\right)=-x.$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $T\neq\operatorname{Im}\rho$ pour tous les zéros non triviaux ρ de $\zeta(s)$. Soit $U\in\mathbb{N}$ un entier impair. Par le théorème des résidus, on a

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}T}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s=-x+\sum_{|\rho|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{n\le U/2}\frac{x^{-2n}}{2n}+I_1+I_2+I_3,$$

où on a posé

$$I_i:=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_i}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s,$$

et où on note γ_1 le chemin de $c-\mathrm{i}T$ à $-U-\mathrm{i}T$, γ_2 le chemin de $-U-\mathrm{i}T$ à $-U+\mathrm{i}T$, et γ_3 le chemin de $-U+\mathrm{i}T, c+\mathrm{i}T$.

L'intégrale I_2 est la plus simple, car on a par (8.2),

$$I_2\ll\int_{-T}^{T}\log U\frac{x^{-U}}{U}\,\mathrm{d}t\ll\frac{T\log U}{Ux^U}.$$

L'estimation des deux autres intégrales est plus difficiles, car les lignes d'intégrations peuvent passer trop près des pôles de $\zeta'/\zeta\,(s)$. Afin d'éviter cette situation, notons que par le théorème 7.18 il y a au plus $O(\log T)$ zéros ρ dans l'intervalle $[T-1,T+1]$. En particulier, il est toujours possible de trouver $\tilde{T}\in[T-1,T+1]$ qui satisfait la borne $|\operatorname{Im}\rho-\tilde{T}|\gg(\log\tilde{T})^{-1}$ pour tous les zéros ρ. Par conséquent, en prouvant la formule (8.7), on peut toujours supposer que T satisfait la borne

$$|\operatorname{Im}\rho-T|\gg\frac{1}{\log T},\tag{8.10}$$

car sinon on simplement remplace T par T' en estimant l'erreur qui se produit à la côté droit de (8.7) par

$$\sum_{\rho:\,|\operatorname{Im}\rho-T|<1}\frac{x^\rho}{\rho}\ll\frac{x\log T}{T}.$$

Par le lemme 8.1 on a pour tout $s=\sigma+\mathrm{i}T_n$ avec $-1\le\sigma\le2$ l'estimation

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right|\ll\log T_n+\sum_{\rho:\,|\operatorname{Im}\rho-T_n|<1}\frac{1}{|s-\rho|}\ll(\log T_n)^2,$$

où on a utilisé encore une fois le théorème 7.18. Alors

$$\begin{aligned}I_1+I_3&\ll\int_{c+\mathrm{i}T_n}^{-1+\mathrm{i}T_n}\frac{(\log T_n)^2}{T_n}|x^s|\,\mathrm{d}s+\int_{-1+\mathrm{i}T_n}^{-U+\mathrm{i}T_n}\frac{\log|s|}{|s|}|x^s|\,\mathrm{d}\sigma\\&\ll\frac{(\log T_n)^2}{T_n}\int_{-\infty}^{c}x^\sigma\,\mathrm{d}\sigma\ll\frac{(\log T_n)^2}{T_n}\frac{x}{\log x}.\end{aligned}$$

Notons que tout ces estimations sont uniformes en U. Alors en laissent U tendre vers l'infini, on voit que

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}T_n}^{c+\mathrm{i}T_n}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s = -x + \sum_{|\rho|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-2n}}{2n} + O\left(\frac{x}{T_n}(\log xT_n)^2\right),$$

ce qui n'est rien d'autre que la formule (8.9) pour le cas $T = T_n$, si on note que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{x^{-2\ell}}{2\ell} = -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

Cela conclut la preuve. □

8.3 La zone de non-annulation

La formule explicite nous a montré comment la répartition des nombres premiers est liée étroitement aux zéros de la fonction zêta de Riemann. Afin de pouvoir déduire une formule asymptotique pour $\psi(x)$, il est ainsi indispensable de connaître la position des zéros ainsi précisément que possible. Le but de cette section est de déduire une partie de la bande critique, où $\zeta(s)$ ne s'annule pas.

La base de tout ce qu'on dira sur les zones de non-annulation est l'identité élémentaire suivante, qui au premier abord apparaît insignifiante :

$$3+4\cos\alpha+\cos 2\alpha = 2(1+\cos\alpha)^2 \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha\in\mathbb{R} \tag{8.11}$$

Dans un premier temps, on montre, en utilisant cette identité, que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la ligne $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Théorème 8.4. *On a $\zeta(1+it)\neq 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

Preuve. En écrivant $\zeta(s)$ comme produit d'Euler et en prenant ensuite la valeur absolue, on obtient pour $\sigma > 1$,

$$|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)| = \exp\left(\sum_p\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\cos(\ell t\log p)}{\ell p^{\ell\sigma}}\right).$$

Par l'identité (8.11), il suit que

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|^4|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)| = \exp\left(\sum_p\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{3+4\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\ell p^{\ell\sigma}}\right)\geq 1. \tag{8.12}$$

Supposons, en raisonnant par l'absurde, que $\zeta(s)$ aurait un zéro en $s = 1+\mathrm{i}t_0$. Comme le pôle de $\zeta(s)$ en $s=1$ est simple, il suit que

$$\lim_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}}\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t_0)|^4|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t_0)| = 0.$$

Mais cela contredit l'inégalité (8.12), que l'on vient de montrer. □

Le résultat précédent est déjà suffisant pour déduire le théorème des nombres premiers dans sa version la plus faible. Mais en utilisant la théorie développée dans les sections précédentes, il est possible de déduire une zone de non-annulation considérablement plus large.

Théorème 8.5. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\operatorname{Re}\rho < 1 - \frac{C}{1 + \log|\operatorname{Im}\rho|}$$

pour tout les zéros non triviaux ρ de $\zeta(s)$.

Preuve. On commence avec l'observation, que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{n^s} = \frac{\cos(t\log n)}{n^\sigma} - \mathrm{i}\frac{\sin(t\log n)}{n^\sigma}.$$

En utilisant cela en combinaison avec (8.11), on obtient l'inégalité

$$\operatorname{Re}\left(-4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\mathrm{i}t) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2\mathrm{i}t) - 3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)(4\cos(t\log n) + \cos(2t\log n) + 3)}{n^\sigma} \geq 0,$$

qui est valide pour tout $\sigma > 1$,

Soit $\rho_0 = \beta_0 + \mathrm{i}\gamma_0$ un zéro non trivial de $\zeta(s)$. Si $1 < \sigma < 2$, on a par le lemme 8.1 l'approximation suivante pour $-\zeta'/\zeta\,(\sigma+\mathrm{i}t)$,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\mathrm{i}t) = -\sum_{\rho:\,|\operatorname{Im}(s-\rho)|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(|\log t|), \tag{8.13}$$

et comme $\operatorname{Re}(s-\rho) > 0$ pour tout zéro non trivial ρ, il suit que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{\operatorname{Re}(s-\rho)}{|s-\rho|^2} > 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir des estimations pour $\zeta'/\zeta\,(\sigma+\mathrm{i}t)$ en simplement supprimant des termes de la somme sur ρ en (8.13).

En supprimant tous les termes sauf $\rho = \rho_0$, on obtient

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\mathrm{i}\gamma_0)\right) < -\frac{1}{\sigma-\beta_0} + c\log|\gamma_0| \quad \text{pour} \quad 1 < \sigma < 2, \tag{8.14}$$

pour une constante $c > 0$ suffisamment large. Supprimer tous les termes nous donne

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2\mathrm{i}\gamma_0)\right) < c\log|\gamma_0| \qquad \text{pour} \quad 1 < \sigma < 2. \tag{8.15}$$

Finalement, comme $\zeta'/\zeta(s)$ a un pôle simple en $s = 1$, on a aussi

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma-1} + c \qquad \text{pour} \quad 1 < \sigma < 2, \tag{8.16}$$

si la constante $c > 0$ est choisie suffisamment large.

On groupant ces trois estimations et en utilisant (8.11), il suit que pour tout $1 < \sigma 2$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Re}\left(-4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\mathrm{i}\gamma_0) - \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2\mathrm{i}\gamma_0) - 3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)\right) \\ &< \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta_0} + C\log(\gamma_0+2), \end{aligned}$$

pour une constante $C > 0$ suffisamment large. On utilise cette inégalité avec

$$\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log(\gamma_0 + 2)},$$

où $\delta > 0$ est une constante positive, et après quelques transformations simples on obtient

$$\beta_0 < 1 + \frac{\delta}{\log(\gamma_0 + 2)} - \frac{4\delta}{(3 + C\delta)\log(\gamma_0 + 2)}.$$

Le théorème suit en posant $\delta = (3C)^{-1}$. □

8.4 Preuve du théorème des nombres premiers

Ayant montré la formule explicite et disposant d'une zone de non-annulation sous la forme du théorème 8.5, il est maintenant chose facile d'obtenir une formule asymptotique pour $\psi(x)$.

Théorème 8.6. *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\psi(x) = x + O\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big).$$

Preuve. On peut supposer que $x \in \mathbb{N}$. Par le théorème 7.18, il suit que

$$\sum_{\rho:\,|\mathrm{Im}\,\rho|<T} \frac{1}{|\rho|} \ll \sum_{n\leq T} \frac{\log n}{n} \ll (\log T)^2.$$

En utilisant cette borne et la zone de non-annulation montrée dans la section précédente, il suit que

$$\sum_{\rho:\,|\mathrm{Im}\,\rho|<T} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x^{1-\frac{C}{\log T}} (\log T)^2.$$

En mettant cela dans la formule explicite et en observant que $\langle x\rangle \geq 1$, on obtient

$$\psi(x) = x + O\Big(x^{1-\frac{C}{\log T}}(\log T)^2 + \frac{x}{T}(\log x)^2\Big),$$

et le théorème suit avec $T = e^{\sqrt{\log x}}$. □

De ce résultat, on peut obtenir sans aucune peine une formule asymptotique pour $\pi(x)$. Avant de donner le résultat, on définit la fonction

$$\mathrm{Li}(\xi) := \int_2^\xi \frac{\mathrm{d}\xi}{\log \xi},$$

qui est connue comme le logarithme intégral.

Théorème 8.7 (Théorème des nombres premiers)**.** *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big).$$

Preuve. Par (4.1), on sait que

$$\theta(x) = x + O\Big(xe^{-c\sqrt{\log x}}\Big).$$

Par la formule sommatoire d'Abel, on a

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{\theta(\xi)}{(\log \xi)^2 \xi}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{x}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{1}{(\log \xi)^2}\, \mathrm{d}\xi + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}} + \int_{3/2}^{x} \frac{\xi e^{-c\sqrt{\log \xi}}}{(\log \xi)^2 \xi}\, \mathrm{d}\xi \right).
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le terme principal, on utilise l'intégration par parties,

$$\frac{x}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{1}{(\log \xi)^2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{x}{\log x} + \left(-\frac{\xi}{\log \xi}\bigg|_{3/2}^{x} + \int_{3/2}^{x} \frac{1}{\log \xi}\, \mathrm{d}\xi \right) = \mathrm{Li}(x) + O(1).$$

En ce qui concerne le terme d'erreur, on observe que la fonction $\xi \mapsto \xi e^{-c\sqrt{\log \xi}}$ est monotone, et alors

$$\int_{3/2}^{x} \frac{\xi e^{-c\sqrt{\log \xi}}}{(\log \xi)^2 \xi}\, \mathrm{d}\xi \ll xe^{-c\sqrt{\log x}} \int_{3/2}^{\infty} \frac{1}{(\log \xi)^2 \xi}\, \mathrm{d}\xi \ll xe^{-c\sqrt{\log x}}.$$

Cela conclut la preuve du théorème. □

Notons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a l'approximation suivante pour le logarithme intégral,

$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n!}{(\log x)^n} + O\left(\frac{x}{(\log x)^N} \right).$$

Par cette formule et le théorème 8.7, il suit aussi que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

ce qui est le théorème des nombres premiers dans sa version le plus faible.

On pourrait améliorer le terme d'erreur, si on savait plus précisément où les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent. Le résultat suivant précise cela.

Théorème 8.8. *Soit* $0 \le \theta < 1$. *Si* $\mathrm{Re}\,\rho \le \theta$ *pour tous les zéros* ρ *de* $\zeta(s)$*, alors*

$$\psi(x) = x + O\big(x^{\theta}(\log x)^2\big).$$

À l'inverse, si $\psi(x) = x + O\big(x^{\theta}\big)$*, alors* $\mathrm{Re}\,\rho \le \theta$ *pour tout zéros* ρ *de* $\zeta(s)$*.*

Preuve. Si $\mathrm{Re}\,\rho \le \theta$, alors $|x^{\rho}| \le x^{\theta}$, et comme avant on obtient

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\theta}(\log T)^2 + \frac{x(\log xT)^2}{T} + \log x \right),$$

et le premier énoncé suit avec $T = x^{1-\theta}$.

Pour montrer le deuxième énoncé, on écrit la dérivée logarithmique de $\zeta(s)$ en sommant par parties comme

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = s\int_1^\infty \psi(\xi)\xi^{-s-1}\,\mathrm{d}\xi,$$

et en utilisant l'hypothèse,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \frac{R(\xi)}{\xi^{s+1}}\,\mathrm{d}\xi,$$

où $R(\xi) := \psi(\xi) - \xi$. Comme $R(\xi) \ll \xi^\theta$, l'intégrale à droite converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > \theta$. Alors la seule singularité de $\zeta'/\zeta(s)$ se trouve en $s = 1$, et par conséquent $\zeta(s)$ ne peut pas avoir de zéros ρ avec $\mathrm{Re}\,\rho > \theta$. □

Par la symétrie des zéros, le mieux est $O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$.

Théorème 8.9. *L'hypothèse de Riemann est correcte si et seulement si*

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.